Revista Tecnocientífica URU
Universidad Rafael Urdaneta
Facultad de Ingeniería
No. 17 Julio - Diciembre 2019
Depósito Legal: PPI 201402ZU4464
ISSN: 2343-6360

Una aplicación del rango numérico esencial a la teoría de operadores

Edixo Rosales
Departamento de Matemáticas, Facultad Experimental de Ciencias, Universidad del Zulia. Maracaibo-Venezuela.
Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Rafael Urdaneta. Maracaibo-Venezuela.
Correo Electrónico: edixorosales@gmail.com

Recibido: 12-02-2019 Aceptado: 21-05-2019

Resumen

Este trabajo estudia el rango numérico esencial de un operador en relación con su propiedad de casi regularidad.

Palabras clave: Rango numérico esencial, espacio reflexivo, operador casi regular.

An application of the essential numerical range to operator theory

Abstract

This paper studies the essential numerical range of an operator in connection with its property of almost regularity.

Keywords: Essential numerical range, Reflexive Space, Almost regular operator.

Introducción

Sea X un espacio de Banach complejo y $B(X)$ sus operadores acotados. Un subespacio M de será cerrado en la topología de la norma. Si $T(M)\subset M$ se dirá que M es invariante para y que $M \in lat(T)$.

Un operador $K \in B(X)$ se dirá compacto, si dada una sucesión $\{x_n\}$ en X acotada, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ y un vector $y \in X$, tal que $x_{n_k} \to y$ en la topología de la norma. Se denotará por $K(X)$ la familia de los operadores acotados.

Dado $T \in B(X)$, por el rango numérico de un operador T, se entenderá el conjunto de los números complejos $W_e(T|M)=\{f(T): f \in X^* \, con \, f(I)=\|f\|=1, f(K)=0, \forall K \in K(X)\}$. Aquí X^* denota el espacio de las funcionales acotadas sobre el espacio de Banach X.

Una sucesión $\{x_n\}$ en X converge débilmente a un vector $x \in X$, si $f(x_n) \to f(x)$ para toda $f \in X^*$. Diremos que $x_n \to x$ débilmente. Es conocido que si $K \in K(X)$ y $x_n \to x$ débilmente, entonces $K(x_n) \to K(x)$ en la topología de la norma.

Nuestro principal objeto de estudio son los operadores reflexivos. Dado un espacio de Banach complejo X, se define para cada $x \in X$ el funcional $J_x \in (X^*)^* = X^{**}$ definido por $J_x(f) = f(x), \forall f \in X^*$.

Se tiene que $\|J_x\| = \|x\|$ y por lo tanto la aplicación $J : X \to X^{**}$ dada por $J(x) = J_x$ es una isometría. Si $J : X \to X^{**}$ es sobreyectiva, se dice que el espacio de Banach X es reflexivo. Es conocido que si X es espacio de Banach reflexivo y M es un subespacio de X, entonces M y M^* son reflexivos.

Un operador $T \in B(X)$ se dirá que es casi regular, si para cada $M \in lat(T)$, el espacio de Banach $\frac{M}{\overline{T(M)}}$ es de dimensión infinita. Aquí $\overline{T(M)}$ indica la clausura topológica en la norma.

Los conceptos básicos del análisis funcional, el lector los puede seguir en las referencias [1], [2] y [3]. Los de rango numérico esencial en las referencias [4] y [1].

Sucesiones Básicas

Sea X un espacio de Banach y $\{x_n\}$ en X una sucesión infinita. Se dice que $\{x_n\}$ es una base de Schauder para X, si todo x en X se puede escribir de manera única de la forma $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n x_n$. Si además $\|x_n\| = 1, \forall n \geq 1$, se dice que $\{x_n\}$ es una base de Schauder normalizada.

Una sucesión $\{x_n\}$ en X se dice básica, si para el subespacio cerrado generado $M = [x_n : n \geq 1]$, $\{x_n\}$ es una base de Schauder para M.

Si es una base de Schauder para X y $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n x_n$, la aplicación $x^*(x) = \alpha_n$ es una funcional lineal continua. Además las proyecciones $P_n(\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_n x_n) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_n x_n$ son operadores continuos y uniformemente acotados. Es decir existe una constante , tal que $\sup\|P_n\|_{n\geq 1} \leq C$. A se le llama la constante asociada a la base de Schauder $\{x_n\}$, y tiene la importante propiedad de qué $1 \leq \|x_n\|\|x_n\| \leq 2C$. Por lo tanto si $\{x_n\}$ es además normalizada, entonces $1 \leq \|x_n^*\| \leq 2C$, de lo que se deduce que $\left\{\frac{1}{\|x_n^*\|}\right\}$ es una sucesión acotada.

Si $\{x_n\}$ es una base de Schauder para X, es conocido que $\{x_n^*\}$ es una sucesión básica para X^*, y si X^* es de Banach reflexivo, realmente $\{x_n^*\}$ es una base de Schauder para X^*.

En un espacio reflexivo , toda sucesión básica normalizada cumple que $x_n \to 0$ débilmente. Esta propiedad es fundamental para nosotros. Bosquejamos su prueba debido a su importancia. Considere $M = [x_n : n \geq 1]$ el que es reflexivo y por lo tanto $M^* = [x_n^* : n \geq 1]$.

Sea $f \in X^*$, luego el funcional restringido $f|M \in M^*$. Si $f|M = 0$, es claro que $f(x_n) \to 0$. Si $f|M \neq 0$, $f|M = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n x_n^*$ y por lo tanto $\|\alpha_n x_n^*\| = |\alpha_n| \|x_n^*\| \to 0$ y como $\left\{ \frac{1}{\|x_n^*\|} \right\}$ es una sucesión acotada, se deduce que $|\alpha_n| = \frac{|\alpha_n| \|x_n^*\|}{\|x_n^*\|} \to 0$.

Finalmente $f|M(x_n) = \alpha_n \to 0$, lo que prueba lo afirmado.

El siguiente lema es fundamental para nuestros resultados:

Lema 2.1: Si X es un espacio de Banach y $T \in B(X)$, $x_n \in X, \|x_n\| = 1$ con $x_n \to 0$ débilmente y $f_n \in X^*$, $f_n(x_n) = \|f_n\| = 1$, $f_n(T(x_n)) \to 0$ en norma, entonces $0 \in W(T)$.

Demostración

Si definimos $g_n(A) = f_n(A(x_n)), \forall A \in B(X)$, tenemos que $g_n(I) = \|g_n\| = 1$ y existe una subsucesión $g_{n_k} \to g$ débilmente *, es decir $g_{n_k}(A) \to g(A)$ en norma de los operadores, para todo $A \in B(X)$. Se prueba que $g(I) = \|g\| = 1$. Por lo tanto $g_{n_k}(T) \to g(T) = 0$. Sea ahora $K \in K(X)$, sabemos que $K(x_n) \to 0$ en norma y como $|f_n(K(x_n))| \le \|K(x_n)\|$, se deduce que $f_n(K(x_n)) \to 0$ en norma. Usando el hecho de que $g_{n_k}(K) = f_{n_k}(K(x_n)) \to g(K) = 0$, se deduce lo pedido.

Una lectura profunda de las sucesiones básicas se puede seguir en la referencia [5].

Para temas relativos a subespacios invariantes se puede consultar la referencia [6]

3. Aplicación del Rango Numérico Esencial a la Teoría de Operadores

Teorema 3.1: Sean X un espacio de Banach reflexivo y $T \in B(X)$; entonces $\lambda \in W_e(T)$, si y sólo si, $\lambda \in W_e(T')$.

Demostración

($\Rightarrow$) Supongamos que $\lambda \in W_e(T)$, existe $f \in B(X)^*$ tal que $\lambda = f(T)$, con $f(I) = \|f\| = 1$ y $f(K) = 0$ para todo .

Se quiere probar que existe tal que , con y para todo $K \in K\left(X^*\right)$.

Sea $A \in B\left(X^*\right)$ y consideremos el operador $A' : X^{**} \to X^{**}$, $A'\left(J_x\right) = J_y$

Se define $\tilde{A}(x) = y$. Es de rutina ver que $\tilde{A}$ está bien definida y que $\tilde{A} \in B(X)$.

Es natural definir $\tilde{f}(A) = f\left(\tilde{A}\right)$. Veamos qué $\tilde{f} \in B\left(X^*\right)^*$.

Si $A, B \in B\left(X^*\right)$, entonces $(A+B)'\left(J_x\right) = (A' + B')\left(J_x\right) = A'\left(J_x\right) + B'\left(J_x\right) = J_{y_1} + J_{y_2} = J_{y_1+y_2}$.

Se deduce que $\widetilde{(A+B)} = \tilde{A} + \tilde{B}$, luego $\tilde{f}(A+B) = f\left(\tilde{A}\right) + f\left(\tilde{B}\right)$.

De manera análoga $\tilde{f}(\alpha A) = f(\widetilde{\alpha A}) = f(\alpha \tilde{A}) = \alpha f\left(\tilde{A}\right)$.

Por otro lado $\left\|\tilde{f}(A)\right\| = \left\|f(\tilde{A})\right\| \le \|f\|\left\|\tilde{A}\right\| \le \|f\|\|A'\| = \|f\|\|A\|$, de lo que se deduce que $\tilde{f} \in B\left(X^*\right)^*$. De lo anterior deducimos que $\left\|\tilde{f}\right\| \le \|f\| = 1$ y como $\tilde{I} = I$, se tiene que $\tilde{f}(I) = f\left(\tilde{I}\right) = f(I) = 1$ y por lo tanto $\left\|\tilde{f}\right\| = 1$.

Sea $K \in K\left(X^*\right)$, se quiere demostrar que $\tilde{K} \in K(X)$

Dada una sucesión acotada $\{x_n\}$ en X, como $K' \in K\left(X^{**}\right)$, luego $K'\left(J_{x_n}\right) = J_{y_n}$. Existe por lo tanto $J_{y_{n_k}} \to J_y$. Por definición $\tilde{K}\left(x_{n_k}\right) = y_{n_k} \to y$, lo que prueba la compacidad de $\tilde{K}$. Se tiene que $\tilde{f}(K) = f\left(\tilde{K}\right) = 0$.

Se finaliza el directo

($\Leftarrow$) Si $\lambda \in W_e(T')$, existe $f \in B\left(X^*\right)$ tal que $f(I) = \|f\| = 1$ con $f(K) = 0,\ \forall K \in K\left(X^*\right)$

Se define $\tilde{f}(A) = f(A'), \forall A \in B(X)$. De manera directa se prueba que $\tilde{f}(T) = \lambda \in W_e(T)$.

El siguiente es nuestro principal resultado:

Teorema 3.2: Si X es un espacio de Banach reflexivo, $T \in B(X)$ es un no casi regular operador, entonces existe $M \in lat(T)$, tal que $0 \in W_e\left((T \mid M)'\right)$.

Demostración

Como T no es casi regular operador, existe un $M \in lat(T)$ tal que $\dfrac{M}{\overline{T(M)}} = T(M)^{\perp} \subset M^*$ es subespacio de dimensión infinita.

Sea $\{f_n\}$ una sucesión básica normalizada en $T(M)^{\perp}$. Sabemos por el teorema de Hahn-Banach, que existen $\gamma_n \in M^{**}$, tales que $\gamma_n(f_n) = \|\gamma_n\| = 1$. Por ser M^* reflexivo, se tiene que M^{**} es reflexivo, luego $\gamma_n = J_{x_n}$ con $x_n \in M$.

Por otro lado $\gamma_n\left(\left(T|M\right)'\right)(f_n)) = \gamma_n\left(f_n \circ (T|M)\right) = f_n\left(T(x_n)\right) = 0$, para todo $n \ge 1$. Como M^* es reflexivo, tenemos que $f_n \to 0$ débilmente.

Se deduce por el lema 2.1 que $0 \in W_e\left((T \mid M)'\right)$.

Corolario 3.3: Si X es un espacio de Banach reflexivo y $T \in B(X)$, $T = \lambda I + K(\lambda \ne 0)$ con $K \in K(X)$; entonces T es un operador casi regular.

Demostración

De lo contrario, T es un no casi regular operador, y por lo tanto existe un $M \in lat(T)$, tal que $0 \in W_e\left((T \mid M)'\right)$ (por el teorema anterior).

Notemos que $(T \mid M)' = T' \mid M^* = \lambda(I \mid M^*) + K' \mid M^*$ con $K' \mid M^*$ compacto.

Sea $f \in B(M^*)^*$, tal que $f(I) = \|f\| = 1$ con $f(F) = 0$ para cada $F \in K\left(M^*\right)$, $f\left(\left(T|M\right)'\right) = 0$

Como $f\left(\left(T|M\right)'\right) = f\left(\lambda\left(I|M^*\right)\right) + f(K' \mid M^*) = \lambda f\left(I|M^*\right) = \lambda = 0$, lo que es una contradicción de la hipótesis.

Nota 3.4 Pregunta: ¿Si X es un espacio de Banach reflexivo, $T \in B(X)$ tal que $0 \notin W_e(T)$; entonces T es un operador casi regular?

Referencias Bibliográficas

[1] Dowson H. (Academic Press), Spectral Theory of linear Operator, (2007)

[2] Fernández C. Introducción a los Espacios de Hilbert, Operadores y espectros. UNED, (2015)

[3] Schehter M. (Academic Press), Principles of Functional Analyisis., New York and London, (1971)

[4] Bonsal F. & Duncan J. (Cambridge University Press), Numerical Range II, (1971)

[5] Carotthers N., A short Course on Banach Space Theory, Department of mathematics and Statistics Bowling Green State University, (2007)

[6] Rosales E., Operadores Uniformemente Estables y Subespacios Invariantes, Revista Bases de la Ciencia, Vol. 4, No. 1, (2019)