

Análisis, diseño y simulación del sistema mecánico subactuado Pendubot

Atilio Morillo y Maribel Pérez Pirela

Centro de investigación de Matemática Aplicada (CIMA). Facultad de Ingeniería.
Universidad del Zulia. Maracaibo. Venezuela.

Amorillo7@canyv.net, Maribel.perez@fing.luz.edu.ve

Recibido: 17-10-2014 Aceptado: 23-01-2015

Resumen

En los sistemas mecánicos subactuados las técnicas de control convencionales son inoperantes cuando se requiere que el sistema esté en un punto de operación o posición de equilibrio. Un tipo de control híbrido puede implementarse cuando la complejidad del sistema hace que una sola técnica convencional de control no tenga los resultados esperados. En este trabajo partiendo de la combinación de métodos como linealización parcial por realimentación y la linealización por realimentación del vector de estados, se diseña una estrategia de control, que logra estabilizar en forma global y asintótica el punto de equilibrio deseado alcanzando un excelente desempeño. Las simulaciones numéricas mostradas al final del trabajo confirman esta apreciación.

Palabras clave: Control no lineal, sistemas mecánicos subactuados, linealización parcial por realimentación.

Analysis, design and simulation of Pendubot subactuated mechanical systems

Abstract

In mechanical systems sub-actuated conventional control techniques are ineffective when it is required that the system is in an operating point or position of equilibrium. A hybrid technique control may be implemented when system complexity makes a single control conventional technique does not accomplish the expected results. In this paper, based on the combination of methods such as partial feedback linearization and state feedback linearization a vector control strategy is designed in such a way that globally and asymptotically stabilizes the desired equilibrium point while reaching an excellent performance. Numerical simulations shown at the end of the study confirm that finding.

Key words: Nonlinear control, sub-actuated mechanical systems, partial feedback linearization

Introducción

El control de sistemas mecánicos subactuados corresponde a uno de los campos más activos de investigación de los sistemas no lineales. El sistema Pendubot es un sistema subactuado que tiene importancia en el área de robótica y por su condición de ser un sistema no lineal de gran complejidad se caracteriza porque las técnicas de control convencionales son inoperantes cuando se requiere que el sistema este en un punto de operación o posición de equilibrio [1]. Ante esta condición se requiere la implementación de técnicas de control para sistemas no lineales, las cuales permitan manejar el sistema y adaptarse a los cambios en los puntos de equilibrio de la planta.

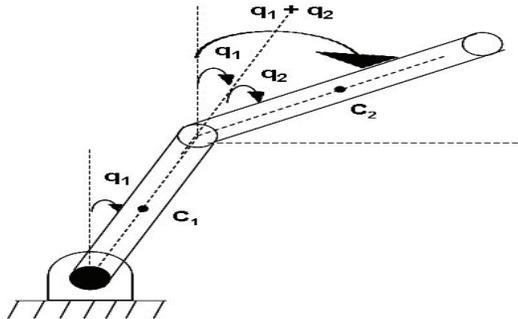
Dado este sistema físico se pretende diseñar un algoritmo de control, el cual permita llevar y mantener en la posición de equilibrio del sistema. Para ello se emplean dos estrategias de control. Una de ellas que permita llevar los dos brazos a la posición deseada y la otra que permita estabilizar o balancear este en la posición de equilibrio deseado [2].

Dinámica del sistema mecánico subactuado

Elaboración del modelo

El denominado sistema Pendubot fue introducido por primera vez en [3]. La figura 1 ilustra el interesante caso que consiste en dos brazos mecánicos giratorios con masas m_1 y m_2 respectivamente. El problema es de interés como un caso de estudio en el diseño de controles no lineales debido a que dicho modelo exhiben una interacción no lineal entre sus movimientos rotacionales. En el sistema para el brazo 1, q_1 es el ángulo de rotación, l_1 es la longitud del brazo, l_{c1} es la distancia al centro de masa, I_1 es el momento de inercia en el centro de masa y C_1 es el centro de masa. Para el brazo 2, q_2 representa el ángulo de rotación, l_2 es la longitud del brazo, l_{c2} es la distancia al centro de masa, I_2 es el momento de inercia en el centro de masa y C_2 es el centro de masa. En el sistema la coordenada actuada es q_1 ,

Figura 1. Sistema Pendubot



En el sistema existen dos subsistemas bien definidos: 1) brazo 1 y 2) brazo 2.

La energía total del sistema = Energía Cinética (K) + Energía Potencial (V), es decir, $E = K + V$. A su vez, $K = K_1 + K_2$ y $V = V_1 + V_2$. Para la energía cinética se considera sólo la existencia de movimiento rotacional. Para la energía potencial se considera la existencia de energía potencial gravitatoria.

Para calcular la energía cinética del brazo 1 se utiliza la ecuación:

$$K_1 = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \quad (1)$$

donde K_1 = Energía cinética rotacional y $\dot{\theta} = \dot{q}_1$

El momento de inercia I esta dado respecto del centro de rotación, por lo tanto, aplicando el teorema de Steiner, se tiene que:

$$I = I_1 + m_1 l c_1^2 \rightarrow K_1 = \frac{1}{2} (I_1 + m_1 l c_1^2) \dot{q}_1^2 \quad (2)$$

Para calcular la energía cinética del brazo 2 se utiliza el teorema de Koenig:

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 v_G^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 \quad (3)$$

donde:

K_2 = Energía cinética traslacional + Energía cinética rotacional

$$\dot{\theta} = \dot{q}_1 + \dot{q}_2, v_G = \dot{C}_2, I = I_2 \rightarrow K_2 = \frac{1}{2} m_2 v_G^2 + \frac{1}{2} I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2$$

Utilizando la energía cinética y potencial se determina el Lagrangiano del sistema:

$$L = K(q_i, \dot{q}_i, t) - V(q_i, t) \quad (4)$$

$$L = \frac{1}{2} (I_1 + m_1 l c_1^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l c_2^2 + I_2 + 2m_2 l_1 l c_2 \cos(q_2)) \dot{q}_1^2 + (m_2 l c_2^2 + I_2 + \dots \\ \dots + m_2 l_1 l c_2 \cos(q_2)) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} (I_2 + m_2 l c_2^2) \dot{q}_2^2 - (m_1 l c_1 + m_2 l_1) g \cos(q_1) - m_2 l c_2 g \cos(q_1 + q_2)$$

Generalizando al caso de sistemas sometidos a fuerzas externas, las trayectorias $q(t)$ serán soluciones al sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i \quad (5)$$

Para el sistema Pendubot $q = (q_1, q_2)^T$ representan las variables generalizadas, una por cada grado de libertad. Así como $\tau = (\tau_1, 0)^T$ denota las fuerzas que son externas aplicadas al sistema. Y τ_1 es el torque aplicado a la primera coordenada q_1 .

Estas ecuaciones, en el caso de sólidos rígidos y en ausencia de fricción pueden escribirse como sigue:

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = B(q, \dot{q})\tau \quad (6)$$

Y las ecuaciones del sistema Pendubot resultarían:

$$\begin{bmatrix} c_1 + c_2 + 2c_3 \cos(q_2) & c_2 + c_3 \cos(q_2) \\ c_2 + c_3 \cos(q_2) & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -c_3 \sin(q_2) & -c_3 \sin(q_2) \dot{q}_2 - c_3 \sin(q_2) \dot{q}_1 \\ c_3 \sin(q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_4 g \cos(q_1) + c_5 g \cos(q_1 + q_2) \\ c_5 g \cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tau \quad (7)$$

donde:

$$c_1 = m_1 l c_1^2 + m_2 l_1^2 + I_1, c_2 = m_2 l c_2^2 + I_2, c_3 = m_2 l_1 l c_2, c_4 = m_1 l c_1 + m_2 l_1, c_5 = m_2 l c_2$$

De tal manera que el sistema se puede expresar:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_1 = p_1 \\ \dot{p}_1 = \frac{1}{\delta} [\alpha + c_2 * \tau] \\ \dot{q}_2 = p_2 \\ \dot{p}_2 = \frac{1}{\delta} [\beta + (-c_2 - c_3 * \cos(q_2)) * \tau] \end{array} \right. \quad (8)$$

donde:

$$\alpha = 2 * c_3 * \sin(q_2) * p_2 * p_1 * c_2 + c_3 * \sin(q_2) * p_2^2 * c_2 - c_4 * g * \cos(q_1) * c_2 + \dots$$

$$\dots + c_2 * c_3 * \sin(q_2) * p_1^2 + c_3 * c_5 * g * \cos(q_2) * \cos(q_1 + q_2) + \dots$$

$$\dots + c_3^2 * \cos(q_2) * \sin(q_2) * p_1^2$$

$$\beta = 2 * c_3 * \sin(q_2) * p_2 * p_1 * c_2 - c_3 * \sin(q_2) * p_2^2 * c_2 + c_4 * g * \cos(q_1) * c_2 - \dots$$

$$\dots - 2 * c_3^2 * \cos(q_2) * \sin(q_2) * p_2 * p_1 - c_2 * c_3 * \sin(q_2) * p_1^2 - c_3 * c_5 * g * \cos(q_2) * \cos(q_1 + q_2) - \dots$$

$$\dots - 2 * c_3^2 * \cos(q_2) * \sin(q_2) * p_1^2 - c_5 * g * \cos(q_1 + q_2) * c_1 - c_3^2 * \cos(q_2) * \sin(q_2) * p_2^2 + \dots$$

$$\dots + c_3 * c_4 * g * \cos(q_2) * \cos(q_1) - c_3 * \sin(q_2) * p_1^2 * c_1$$

$$\delta = c_1 * c_2 - c_3^2 * \cos(q_2)^2$$

Identificación de los Parámetros

Basado en el método utilizado por Mechanotronic Systems Inc se aplica un proceso de identificación de parámetros.

Para ello, se utiliza la ecuación de pasividad:

$$\dot{E} = \dot{q}^T \tau \quad (9)$$

Entre dos tiempos dados $t = T$ y $t = T + dT$ se obtiene

$$dE = E(T + dT) - E(T) \longrightarrow = \int_T^{T+dT} \dot{q}^T(u) * \tau(u) = \{w(T + dT) - w(T)\} * c$$

Donde se ha usado $E = w(q, \dot{q}) * c$ y $c = [c_1, \dots, c_5]^T$ es la parametrización.

Llevando a cabo este procedimiento de identificación se obtienen los siguientes parámetros: $c_1 = 0.0308 \cdot Vs^2$ $c_2 = 0.0106 \cdot Vs^2$ $c_3 = 0.0095 \cdot Vs^2$ $c_4 = 0.2086 \cdot Vs^2 / m$ y $c_5 = 0.0630 \cdot Vs^2 / m$.

Análisis de los Puntos Críticos

Para el Pendubot mostrado en la figura 1 existen cuatro posibles puntos críticos

$$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \text{ arriba-arriba; } \left(\frac{\pi}{2}, -\pi\right) \text{ arriba-abajo; } \left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right) \text{ abajo arriba y } \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \text{ abajo-abajo}$$

El punto crítico $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ abajo-abajo, es punto de equilibrio estable, ya que es el estado del sistema inicial para el cual no se debe ejercer ningún torque sobre el pivote de los péndulos, por lo tanto el sistema esta en reposo.

Por el contrario el punto crítico $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ arriba-arriba, es punto de equilibrio inestable. Para esta posición inestable se desarrolla una estrategia de control la cual permita llevar el sistema a la posición deseada en equilibrio estable.

Metodología del diseño del control

El objetivo del controlador es el de llevar el sistema mecánico subactuado de la posición de equilibrio estable a una posición de equilibrio inestable en donde el sistema se balancea y mantenerlo en equilibrio.

La estrategia de control se divide en dos partes. La primera de ellas emplea un controlador que se encarga de llevar los dos brazos cerca de la posición deseada mediante la oscilación del brazo 1 (*swing up Control*) [4] y se desarrolla aplicando el método de Linealización Parcial por Realimentación [5], la segunda estrategia mantiene estable el sistema en la posición de equilibrio (*balancing Control*) empleando una técnica lineal para la realimentación óptima del estado del sistema mediante la identificación de los parámetros.

Cada una de las estrategias se definen a continuación.

Swing up Control

Las ecuaciones del movimiento que se plantearon en (7) son no lineales y describen por completo la dinámica del sistema. Debido a que el brazo dos es independiente del punto en donde se aplica la acción de control (inactiva), solo se puede linealizar el grado de libertad activo del sistema (brazo uno) [2]. El método de linealización mas adecuado para desarrollar este controlador es el de Linealización Parcial por Realimentación planteado en [2] y [6]. Se tiene entonces que:

$$u = -K_p (q_1 - q_1^{ref}) - K_d p_1 \quad (10)$$

En donde q_1 representa la posición angular del brazo uno y q_1^{ref} es la posición en la cual se quiere ubicar el sistema. Los parámetros K_p y K_d son ganancias que se deben sintonizar para la generación de la trayectoria.

De la expresión $\ddot{q}_1 = \frac{1}{\delta} [\alpha + c_2 * \tau]$ se obtiene que: $u = \frac{1}{\delta} [\alpha + c_2 * \tau]$. Y por lo tanto $\tau = \frac{1}{c_2} [\delta * u - \alpha]$.

Balancing Control

Esta técnica o procedimiento consiste en implementar un controlador que se encargue de mantener estable el Pendubot alrededor de una posición de equilibrio. Para ello se diseña un controlador a partir de la linealización del sistema alrededor de los puntos de operación. Con el modelo linealizado se emplea un lazo de realimentación el cual realimente las variables de estado para cada posición de equilibrio deseada.

Luego de que se obtiene el modelo del Pendubot en la ecuación (7), se linealiza este para la posición de equilibrio inestable del sistema, cuando $(\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$. Los valores de estas derivadas se calculan en dicho punto y se obtiene:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(c_2 * c_4 - c_3 * c_5)g}{\delta} & 0 & \frac{-c_3 * c_5 * g}{\delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{c_5 * g * (c_1 + c_3) - c_4 * g * (c_2 + c_3)}{\delta} & 0 & \frac{g * (c_1 * c_3 + c_3 * c_5)}{\delta} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{c_2}{\delta} \\ 0 \\ \frac{-c_2 - c_3}{\delta} \end{bmatrix}$$

resultando el sistema de la forma $\dot{x} = Ax + Bu$.

Para el diseño del control proporcional se utiliza el mecanismo de ubicación de polos. Es decir, se elige $K = [K_1 \ K_2 \ K_3 \ K_4]$ haciendo $u = -Kx$. Resultando el sistema $\dot{x} = Ax + B(-Kx) \longrightarrow \dot{x} = (A - BK)$. Entonces basta elegir K de modo que $A - BK$ posea valores propios todos con parte real negativa.

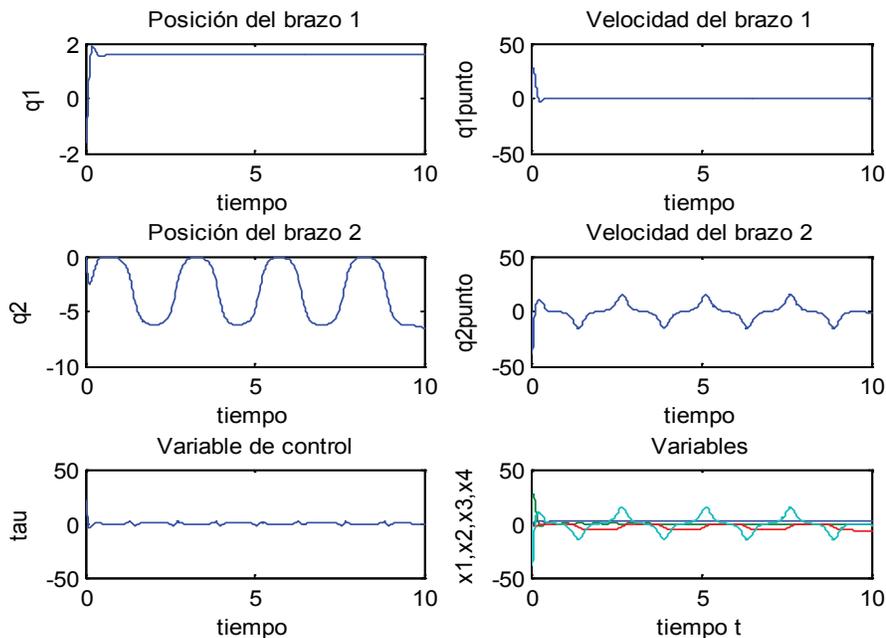
Utilizando la técnica LQR a través del programa Matlab, se obtiene un vector de ganancias $K = [-379.81 \ -240.80 \ -368.34 \ -189.02]$, el cual convierte al sistema $\dot{x} = Ax + Bu$ en un sistema globalmente asintóticamente estable alrededor del punto de equilibrio $(\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0)$.

Con el fin de que el sistema pueda ser controlado por los dos algoritmos diseñados en Matlab, estos deben actuar en determinados momentos según sean las posiciones angulares de los brazos. Estos algoritmos contienen un bloque Switch que decide cual de las estrategias de control debe pasar al actuador del Pendubot según sean las posiciones de los brazos 1 y 2.

Simulaciones Numéricas

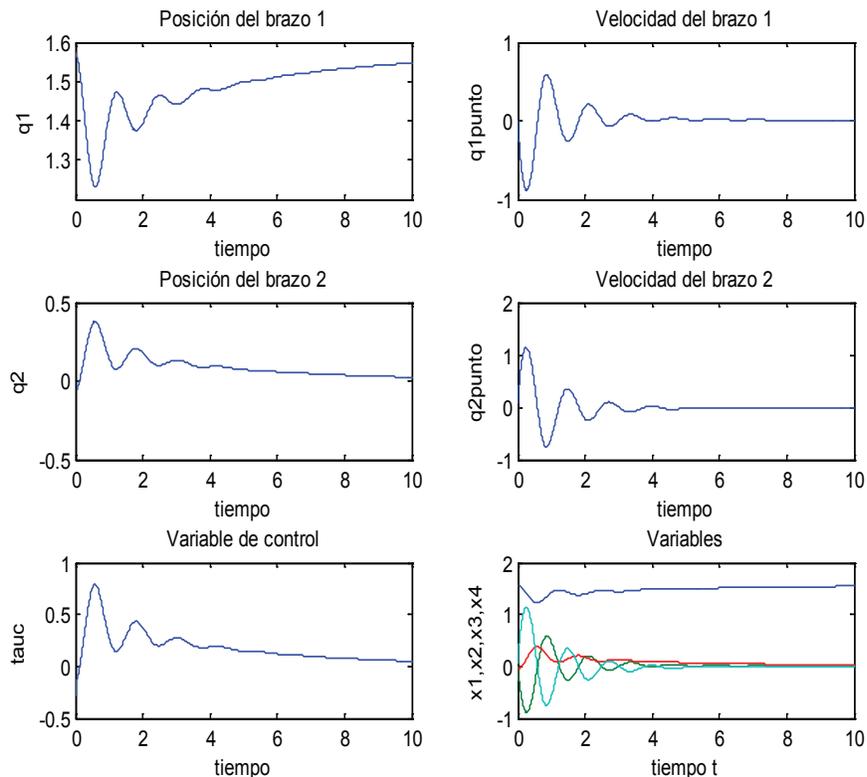
Para los algoritmos de control se desarrollan varios programas en Matlab los cuales se basan en los criterios planteados anteriormente. En la figura 2 se muestra el comportamiento de las cuatro variables de estado del sistema (posición y velocidad angulares de cada uno de los brazos).

Figura 2. Comportamiento de las variables con la aplicación del Swing up Control



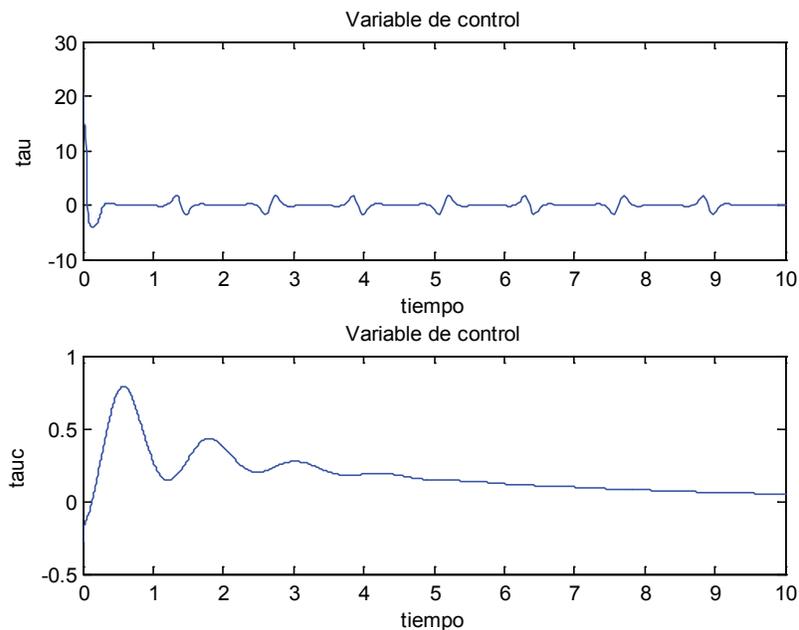
Se observa como inicialmente entra en funcionamiento el algoritmo que genera la trayectoria para que el sistema oscile hasta alcanzar su referencia (*swing up*), luego cuando el algoritmo determina a través del bloque switch que se ha llegado a la posición deseada, se observa en la figura 3 que la estrategia cambia al control que realiza la estabilización o balanceo alrededor del punto de operación (*balancing*).

Figura 3. Comportamiento de las variables con la aplicación del Balancing Control



En la figura 4 se observa como ambas funciones de control son de naturaleza acotada, ya que se observa que la convergencia es a cero. También es importante destacar que ambos controles logran estabilizar el sistema en un tiempo de simulación o tiempo de asentamiento perfectamente aceptable.

Figura 4. Comportamiento del Swing up Control y Balancing Control



Conclusiones

El estudio de técnicas híbridas de control es una herramienta útil para el manejo de sistemas no lineales. Estas permiten hacer una descripción del sistema y establecer las regiones de operación del mismo con el fin de tomar una decisión para ejecutar una estrategia de control.

Al final se realizaron simulaciones numéricas que muestran el excelente comportamiento del controlador diseñado, ya que logra con éxito llevar y mantener a la posición de equilibrio deseada del sistema. Se logra establecer que el brazo 1 alcanza la posición de equilibrio deseada en un tiempo aproximado de 8 segundos, en ese instante el algoritmo diseñado decide emplear la otra técnica de control que logra estabilizar el sistema.

Referencias bibliográficas

1. J. Ortega and L. Weiping. "Applied Nonlinear Control", Prentice Hall, New Jersey, 1991.
2. M. Escobar "Control Óptimo del Pendubot con Técnicas Inteligentes Utilizando un DSP", Tesis de Maestría, Universidad Tecnológica de Pereira, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Diciembre de 2005.
3. R. Ortega, M. Spong, F. Gómez and G. Blankenstein G. "Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment". IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. C, AC-47, N° 8, March 2002, pp: 1218-1233.
4. M. Spong. "The swing up control problem for the acrobot", IEEE, Contr. Syst. Mag., Vol. 15., sept. 1995. pp. 49-55.
5. J. Slotine and L. Weiping. "Applied Nonlinear Control, Prentice Hall, New Jersey 1991.
6. V. Zoran. "Nonlinear Control Systems", Control Engineer Series, Marcel Dekker, inc., New York, 2003.