Revista Tecnocientífica URU
Universidad Rafael Urdaneta
Facultad de Ingeniería
Nº 9 Julio-Diciembre 2015
Depósito legal: ppi 201402ZU4464
ISSN: 2343 - 6360

Teoremas para la función de Bessel generalizada de tres variables, dos parámetros y un índice

Josefina Matera[1], Ana Isolina Prieto[1] , Leda Galué[1] y Susana Salinas de Romero[2]
[1]Universidad del Zulia. Facultad de Ingeniería.
Centro de Investigación de Matemática Aplicada (CIMA)
Apartado de correo 10482
[2]Departamento de Ciencias Básicas. Facultad de Ingeniería. Universidad Rafael Urdaneta
E-mails: pinamatera@yahoo.es, aisolinap@hotmail.com, lgalue@hotmail.com, susanaderomero@hotmail.com
Maracaibo-Venezuela
Recibido: 26-05-2015 Aceptado: 25-09-2015

Resumen

Usando el método de la función generadora, obtenemos el teorema de adición, el teorema de multiplicación y el teorema de Graff para la función de Bessel generalizada J_n(x,y,z; τ,δ).

Palabras clave: Teorema de adición, teorema de multiplicación, teorema de Graff, función de Bessel generalizada, polinomios de Hermite.

Theorems for the generalized Bessel function of three variables, two parameters and one index

Abstract

Using the generating function method, we obtain the adition theorem, the multiplication theorem and Graff theorem for the generalized Bessel function J_n(x,y,z; τ,δ).

Key words: Adition theorem, multiplication theorem, Graff theorem and generalized Bessel function, Hermite polynomials.

Introducción

Las funciones especiales son muy importantes para las ciencias básicas y aplicadas, estas son utilizadas en muchas áreas del conocimiento, entre ellas: matemática, física e ingeniería. Existe un amplio material bibliográfico sobre las funciones especiales, siendo [1, 2 ,3] ejemplos muy representativos.

Un caso especial y muy importante de estas funciones especiales son las funciones de Bessel [3]. Dattoli y otros [4] presentan una teoría de la función de Bessel generalizada (FBG). Estas funciones aparecen en la solución de muchos problemas de aplicación.

Se presenta la función de Bessel generalizada (FBG) de dos variables y un parámetro J_n(x,y;z) por medio de la función generadora [5]

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)+\frac{y}{2}\left(t^2\tau-\frac{1}{t^2\tau}\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^n J_n\left(x,y;\tau\right) \tag{1}$$

donde x,y son variables reales y t, τ son complejos diferente de cero con $|t|,|\tau|<\infty$. Se puede ver que para y=0, la función (1) se reduce a la bien conocida función generadora de la función de Bessel de una variable, esto es

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^n J_n(x), \tag{2}$$

Ana Isolina Prieto y otros [6] introducen la función generadora de la función de Bessel generalizada de tres variables, dos parámetros y un índice por medio de

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)+\frac{y}{2}\left(t^2\tau-\frac{1}{t^2\tau}\right)+\frac{z}{2}\left(t^3\delta-\frac{1}{t^3\delta}\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^n J_n(x,y,z;\tau,\delta) \tag{3}$$

donde x,y,z son variables reales y t,τ,δ son parámetros complejos con $0<|t|,|\tau|,|\delta|<\infty$.

Si z=0 en (3), se obtiene la función de Bessel (1), y para y=z=0 en (3), resulta la ecuación (2).

Los polinomios de Hermite usualmente son un complemento de las FBG. Existe una clase de polinomios de Hermite generalizados de varias variables, denotado por $H\ (x,y)$ para el caso de dos variables, definidos por la función generadora [4]

$$\exp\left(xt+yt^2\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}H_n(x,y), \tag{4}$$

y $H_n(x,y,z)$ para el caso de tres variables, definidos por la función generadora [7]

$$\exp\left(xt+yt^2+zt^3\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}H_n(x,y,z) \tag{5}$$

Dattoli y otros [8] han investigado la teoría de las funciones de Bessel generalizadas y los polinomios de Hermite.

En este trabajo usamos el método de la función generadora para obtener el teorema de adición, el teorema de multiplicación y el teorema de Graff para las FBG de tres variables, dos parámetros y un índice $J_n($x,y,z;$\tau,\delta)$.

Teoremas de la función de Bessel $J_n($x,y,z;$\hat{o},\ddot{a})$

2.1 Teoremas de adición

$$J_n(x\pm u,y\pm \mathrm{v},z\pm \mathrm{w};\tau,\delta)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}J_{n\mp l}(x,y,z;\tau,\delta)J_l\left(u,\mathrm{v},\mathrm{w};\tau^{\pm1},\delta^{\pm1}\right) \tag{6}$$

Demostración

Si en (3) se hacen los cambios de variables

$$x=x+u,\ y=y+\mathrm{v},\ z=z+\mathrm{w},$$

se tiene

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}t^nJ_n(x+u,y+\mathrm{v},z+\mathrm{w};\tau,\delta)=$$

$$\exp\left[\frac{x+u}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)+\frac{y+\mathrm{v}}{2}\left(t^2\tau-\frac{1}{t^2\tau}\right)+\frac{z+\mathrm{w}}{2}\left(t^3\delta-\frac{1}{t^3\delta}\right)\right]$$

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)+\frac{y}{2}\left(t^2\tau-\frac{1}{t^2\tau}\right)+\frac{z}{2}\left(t^3\delta-\frac{1}{t^3\delta}\right)\right]$$

$$\exp\left[\frac{u}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)+\frac{\mathrm{v}}{2}\left(t^2\tau-\frac{1}{t^2\tau}\right)+\frac{w}{2}\left(t^3\delta-\frac{1}{t^3\delta}\right)\right]$$

$$=\sum_{h=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty}t^{h+l}J_h\left(x,y,z;\tau,\delta\right)J_l\left(u,\mathrm{v},\mathrm{w};\tau,\delta\right)$$

Haciendo n=h+l, queda

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}t^nJ_n\left(x+u,y+\mathrm{v},z+\mathrm{w};\tau,\delta\right)=$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}t^n\sum_{l=-\infty}^{\infty}J_{n-l}\left(x,y,z;\tau,\delta\right)J_l\left(u,\mathrm{v},\mathrm{w};\tau,\delta\right)$$

de donde, al igualar coeficientes de t^n, resulta

$$J_n\left(x+u,y+\mathrm{v},z+\mathrm{w};\tau,\delta\right)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}J_{n-l}\left(x,y,z;\tau,\delta\right)J_l\left(u,\mathrm{v},\mathrm{w};\tau,\delta\right) \tag{7}$$

Análogamente, si en (3) se hacen los cambios x=x-u, y=y-v y z=z-w, se tiene

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}t^nJ_n(x-u,y-\mathrm{v},z-\mathrm{w};\tau,\delta)=$$

$$\exp\left[\frac{x-u}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)+\frac{y-\mathrm{v}}{2}\left(t^2\tau-\frac{1}{t^2\tau}\right)+\frac{z-\mathrm{w}}{2}\left(t^3\delta-\frac{1}{t^3\delta}\right)\right]$$

$$=\exp\left[\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)+\frac{y}{2}\left(t^2\tau-\frac{1}{t^2\tau}\right)+\frac{z}{2}\left(t^3\delta-\frac{1}{t^3\delta}\right)\right]$$

$$\exp\left[\frac{u}{2}\left(\frac{1}{t}-t\right)+\frac{\mathrm{v}}{2}\left(\frac{1}{t^2\tau}-t^2\tau\right)+\frac{\mathrm{w}}{2}\left(\frac{1}{t^3\delta}-t^3\delta\right)\right]$$

$$= \sum_{h=-\infty}^{\infty} t^h J_h\left(x,y,z;\tau,\delta\right) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t}\right)^l J_l\left(u,\mathrm{v},\mathrm{w};\tau^{-1},\delta^{-1}\right)$$

entonces,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x-u,y-\mathrm{v},z-\mathrm{w};\tau,\delta)=$$

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} t^{h-l} J_h\left(x,y,z;\tau,\delta\right) J_l\left(u,\mathrm{v},\mathrm{w};\tau^{-1},\delta^{-1}\right)$$

Efectuando el cambio n=h-l, queda

$$J_h\left(x,y,z;\tau,\delta\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n \sum_{l=-\infty}^{\infty} J_{h+l}\left(x,y,z;\tau,\delta\right) J_l\left(u,\mathrm{v},\mathrm{w};\tau^{-1},\delta^{-1}\right)$$

de donde

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n\left(x-u,y-\mathrm{v},z-\mathrm{w};\tau,\delta\right)=\sum_{l=-\infty}^{\infty} J_{n+l}\left(x,y,z;\tau,\delta\right) J_l\left(u,\mathrm{v},\mathrm{w};\tau^{-1},\delta^{-1}\right) \tag{8}$$

Los resultados (7) y (8) se agrupan en (6).

2.2. Teorema de multiplicación

$$J_n\left(\lambda x,\mu y,\rho z;\tau,\delta\right)=\lambda^{-n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}J_{n-m}\left(x,y,z;\frac{\lambda^2\tau}{\mu},\frac{\lambda^3\delta}{\rho}\right)$$

$$H_m\left(\frac{x}{2}\left(\lambda^2-1\right);\frac{y\lambda^2\tau}{2\mu}\left(\mu^2-1\right)\frac{\lambda^3\delta z}{2\rho}\left(\rho^2-1\right)\right) \tag{9}$$

Demostración

Según (3)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n\left(\lambda x,\mu y,\rho z;\tau,\delta\right)=$$

$$exp\left[\frac{\lambda x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)+\frac{\mu y}{2}\left(t^2\tau-\frac{1}{t^2\tau}\right)+\frac{\rho z}{2}\left(t^3\delta-\frac{1}{t^3\delta}\right)\right] \tag{10}$$

Sumando y restando los términos convenientes, se puede escribir (10) como

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n\left(\lambda x,\mu y,\rho z;\tau,\delta\right)=$$

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(\frac{t}{\lambda}-\frac{\lambda}{t}\right)\right]Œ\exp\left[\frac{y}{2}\left(\frac{t^2\tau}{\mu}-\frac{\mu}{t^2\tau}\right)\right]Œ\exp\left[\frac{z}{2}\left(\frac{t^3\delta}{\rho}-\frac{\rho}{t^3\delta}\right)\right]$$

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(\lambda^2-1\right)\frac{t}{\lambda}+\frac{\lambda^2\tau y}{2\mu}\left(\mu^2-1\right)\left(\frac{t}{\lambda}\right)^2+\frac{\lambda^3\delta z}{2\rho}\left(\rho^2-1\right)\left(\frac{t}{\lambda}\right)^3\right]$$

De (2), se tiene

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(\frac{t}{\lambda}-\frac{\lambda}{t}\right)\right]=\sum_{h=-\infty}^{\infty}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^h J_h(x);$$

$$\exp\left[\frac{y}{2}\left(\frac{t^2\tau}{\mu}-\frac{\mu}{t^2\tau}\right)\right]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}t^{2k}\left(\frac{\tau}{\mu}\right)^k J_k(y)$$

y

$$\exp\left[\frac{z}{2}\left(\frac{t^3\delta}{\rho}-\frac{\rho}{t^3\delta}\right)\right]=\sum_{l=-\infty}^{\infty}t^{3l}\left(\frac{\delta}{\rho}\right)^l J_l(z)$$

y de la función generadora (5)

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(\lambda^2-1\right)\frac{t}{\lambda}+\frac{\lambda^2\tau y}{2\mu}\left(\mu^2-1\right)\left(\frac{t}{\lambda}\right)^2+\frac{\lambda^3\delta z}{2\rho}\left(\rho^2-1\right)\left(\frac{t}{\lambda}\right)^3\right]=$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^m\frac{1}{m!}H_m\left(\frac{x}{2}\left(\lambda^2-1\right),\frac{\lambda^2\tau y}{2\mu}\left(\mu^2-1\right),\frac{\lambda^3\delta z}{2\rho}\left(\rho^2-1\right)\right)$$

Luego, se tiene

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}t^n J_n\left(\lambda x,\mu y,\rho z;\tau,\delta\right)=\sum_{h,k,l=-\infty}^{\infty}t^{h+2k+3l}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^h J_h(x)\left(\frac{\tau}{\mu}\right)^k J_k(y)\left(\frac{\delta}{\rho}\right)^l J_l(z)$$

$$\mathrm{C}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^m\frac{1}{m!}H_m\left(\frac{x}{2}\left(\lambda^2-1\right),\frac{\lambda^2\tau y}{2\mu}\left(\mu^2-1\right),\frac{\lambda^3\delta z}{2\rho}\left(\rho^2-1\right)\right)$$

Haciendo cambio de índices h=s-2k-3l, queda

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}t^n J_n\left(\lambda x,\mu y,\rho z;\tau,\delta\right)=\sum_{s,k,l=-\infty}^{\infty}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^s\left(\frac{\lambda^2\tau}{\mu}\right)^k\left(\frac{\lambda^3\delta}{\rho}\right)^l J_{s-2k-3l}(x)J_k(y)J_l(z)\mathrm{C}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{t}{\lambda}\right)^m\frac{1}{m!}H_m\left[\frac{x}{2}\left(\lambda^2-1\right),\frac{\lambda^2\tau y}{2\mu}\left(\mu^2-1\right),\frac{\lambda^3\delta z}{2\rho}\left(\rho^2-1\right)\right]$$

Usando [6, pág. (33), (4)]

$$J_n\left(x,y,z;\tau,\delta\right)=\sum_{h,k=-\infty}^{\infty}\tau^h\delta^k J_{n-2h-3k}(x)J_h(y)J_k(z)$$

resulta

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}t^n J_n\left(\lambda x,\mu y,\rho z;\tau,\delta\right)=\sum_{s=-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{\tau}{\lambda}\right)^{s+m}\frac{1}{m!}J_s\left(x,y,z;\frac{\lambda^2\tau}{2\mu},\frac{\lambda^3\delta}{\rho}\right)\mathrm{C}$$

$$H_m\left[\frac{x}{2}\left(\lambda^2-1\right),\frac{\lambda^2\tau y}{2\mu}\left(\mu^2-1\right),\frac{\lambda^3\delta z}{2\rho}\left(\rho^2-1\right)\right]$$

Haciendo cambio de índices $s=n-m$, se obtiene

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}t^n J_n\left(\lambda x,\mu y,\rho z;\tau,\delta\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}t^n\lambda^{-n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}J_{n-m}\left(x,y,z;\frac{\lambda^2\tau y}{\mu},\frac{\lambda^3\delta}{\rho}\right)$$

$$H_m\left[\frac{x}{2}\left(\lambda^2-1\right),\frac{\lambda^2\tau y}{2\mu}\left(\mu^2-1\right),\frac{\lambda^3\delta z}{2\rho}\left(\rho^2-1\right)\right]$$

Igualando coeficientes de t^n, se obtiene (9).

2.3.Teorema de Graf

Sea $J_n\left(x,y,z;\tau,\delta\right)$ una función de Bessel generalizada de tres variables, dos parámetros y un índice, como definida en (3), entonces

$$\left(\frac{x-\frac{u}{\xi}}{x-u\xi}\right)^{\frac{k}{2}}J_k\left(a,b,c;\gamma,\rho\right)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\xi^m J_{m+k}(x,y,z;\tau,\delta)J_m\left(u,\mathrm{v},\mathrm{w},\tau',\delta'\right) \tag{11}$$

donde $x,y,z,u,\mathrm{v},\mathrm{w},a,b\ y\ c,$ son variables reales; $\tau,\delta,\tau',\delta',\gamma,\rho$ son parámetros complejos con $0<|\tau|,|\delta|,|\tau'|,|\delta'|,|\gamma|,|\rho|<\infty$, y

$$a\left(x,u,\xi\right)=\sqrt{\left(x-u\xi\right)x-\frac{u}{\xi}} \tag{12}$$

$$b\left(y,\mathrm{v},\xi,\tau,\tau'\right)=\sqrt{\left(y\tau-\frac{\mathrm{v}}{\xi^2\tau'}\right)\left(\frac{y}{\tau}-\mathrm{v}\xi^2\tau'\right)} \tag{13}$$

$$c\left(z,\mathrm{w},\xi,\delta,\delta'\right)=\sqrt{\left(z\delta-\frac{\mathrm{w}}{\xi^3\delta'}\right)\left(\frac{z}{\delta}-\mathrm{w}\xi^3\delta'\right)} \tag{14}$$

$$\gamma\left(x,y,u,\mathrm{v},\xi,\tau,\tau'\right)=\sqrt{\frac{y\tau-\frac{\mathrm{v}}{\xi^2\tau'}}{\frac{y}{\tau}-\mathrm{v}\xi^2\tau'}}\left(\frac{x-u\xi}{x-\frac{u}{\xi}}\right) \tag{15}$$

$$\rho\left(x,z,u,\mathrm{w},\xi,\delta,\delta'\right)=\sqrt{\frac{z\delta-\frac{\mathrm{w}}{\xi^3\delta'}}{\frac{z}{\delta}-\mathrm{w}\xi^3\delta'}}\left(\frac{x-u\xi}{x-\frac{u}{\xi}}\right)^{3/2} \tag{16}$$

Demostración

Considerando el producto de dos funciones $J_n(x,y,z;\tau,\delta)$ y usando la función generadora

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)+\frac{y}{2}\left(t^2\tau-\frac{1}{t^2\tau}\right)+\frac{z}{2}\left(t^3\delta-\frac{1}{t^3\delta}\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}t^n J_n(x,y,z;\tau,\delta)$$

se obtiene

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)+\frac{y}{2}\left(t^2\tau-\frac{1}{t^2\tau}\right)+\frac{z}{2}\left(t^3\delta-\frac{1}{t^3\delta}\right)\right]$$

$$\exp\left[\frac{u}{2}\left(s-\frac{1}{s}\right)+\frac{\mathrm{v}}{2}\left(s^2\tau'-\frac{1}{s^2\tau'}\right)+\frac{\mathrm{w}}{2}\left(s^3\delta'-\frac{1}{s^3\delta'}\right)\right] =$$

$$\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} t^n s^m J_n(x,y,z;\tau,\delta)J_m\left(u,\mathrm{v},\mathrm{w},\tau',\delta'\right).$$

Haciendo el cambio $s=\dfrac{\xi}{t}$, se tiene

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)+\frac{y}{2}\left(t^2\tau-\frac{1}{t^2\tau}\right)+\frac{z}{2}\left(t^3\delta-\frac{1}{t^3\delta}\right)\right]$$

$$\exp\left[\frac{u}{2}\left(\frac{\xi}{t}-\frac{t}{\xi}\right)+\frac{\mathrm{v}}{2}\left(\frac{\xi^2\tau'}{t^2}-\frac{t^2}{\xi^2\tau'}\right)+\frac{\mathrm{w}}{2}\left(\frac{\xi^3\delta'}{t^3}-\frac{t^3}{\xi^3\delta'}\right)\right]=$$

$$\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} t^{n-m}\xi^m J_n(x,y,z;\tau,\delta)J_m\left(u,\mathrm{v},\mathrm{w},\tau',\delta'\right).$$

Aplicando las propiedades de las exponenciales en el lado izquierdo de la ecuación, resulta

$$\exp\left[\frac{t}{2}\left(x-\frac{u}{\xi}\right)-\frac{1}{2t}\left(x-u\xi\right)+\frac{t^2}{2}\left(y\tau-\frac{\mathrm{v}}{\xi^2\tau'}\right)-\frac{1}{2t^2}\left(\frac{y}{\tau}-\mathrm{v}\xi^2\tau'\right)+\frac{t^3}{2}\left(z\delta-\frac{\mathrm{w}}{\xi^2\delta'}\right)-\right.$$

$$\left.\frac{1}{2t^3}\left(\frac{z}{\delta}-\mathrm{w}\xi^3\delta'\right)\right]=\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} t^{n-m}\xi^m J_n(x,y,z;\tau,\delta)J_m\left(u,\mathrm{v},\mathrm{w};\tau',\delta'\right). \tag{17}$$

Ahora, haciendo los cambios

$$t\left(x-\frac{u}{\xi}\right)=ar \tag{18}$$

$$\frac{\left(x-u\xi\right)}{t}=\frac{a}{r} \tag{19}$$

$$t^2\left(y\tau-\frac{\mathrm{v}}{\xi^2\tau'}\right)=br^2\gamma \tag{20}$$

$$\frac{\left(\dfrac{y}{\tau}-\mathrm{v}\xi^2\tau'\right)}{t^2}=\frac{b}{r^2\gamma} \tag{21}$$

$$t^3\left(z\delta-\frac{\mathrm{w}}{\xi^3\delta'}\right)=cr^3\rho \tag{22}$$

$$\frac{\left(\frac{z}{\delta}-\mathrm{w}\xi^3\delta'\right)}{t^3}=\frac{c}{r^3\rho}, \tag{23}$$

y sustituyendo (18)-(22) en (17), resulta

$$\exp\left[\frac{a}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)+\frac{b}{2}\left(r^2\gamma-\frac{1}{r^2\gamma}\right)+\frac{c}{2}\left(r^3\rho-\frac{1}{r^3\rho}\right)\right]=$$

$$\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} t^{n-m}\xi^m J_n(x,y,z;\tau,\delta)J_m\left(u,\mathrm{v},\mathrm{w};\tau',\delta'\right).$$

Efectuando el cambio de índice $k=n-m$ y usando (3), se obtiene

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} r^k J_k(a,b,c;\gamma,\rho)=\sum_{k,m=-\infty}^{+\infty} t^k\xi^m J_{k+m}(x,y,z;\tau,\delta)J_m\left(u,\mathrm{v},\mathrm{w};\tau',\delta'\right).$$

De (18) y (19)

$$r=t\sqrt{\frac{x-\frac{u}{\xi}}{x-u\xi}} \tag{24}$$

y sustituyendo en la ecuación anterior, queda

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} t^k\left(\frac{x-\frac{u}{\xi}}{x-u\xi}\right)^{\frac{k}{2}} J_k(a,b,c;\gamma,\rho)=\sum_{k,m=-\infty}^{+\infty} t^k\xi^m J_{k+m}(x,y,z;\tau,\delta)J_m\left(u,\mathrm{v},\mathrm{w};\tau',\delta'\right).$$

Al igualar coeficientes de t^k, se concluye que

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \xi^m J_{k+m}(x,y,z;\tau,\delta)J_m\left(u,\mathrm{v},\mathrm{w};\tau',\delta'\right)=\left(\frac{x-\frac{u}{\xi}}{x-u\xi}\right)^{\frac{k}{2}} J_k\left(a,b,c;\gamma,\rho\right).$$

Por otro lado, los resultados (12)-(16) se obtienen como se indica en la Tabla 1:

Tabla 1. Deducción de los resultados (12-16)

Ecuación Usada	Resultado Obtenido
(18) y (19)	$a(x,u;\xi)$
(20) y (21)	$b(y,v,\xi,\tau,\tau')$
(22) y (23)	$c(z,w,\xi,\delta,\delta')$
(20), (24) y (13)	$\gamma(x,y,u,v,\xi,\tau,\tau')$
(22), (24) y (14)	$\rho(x,z,u,w,\xi,\delta,\delta')$

Agradecimiento

Las autoras agradecen al Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico de la Universidad del Zulia por el soporte financiero brindado.

Bibliografía

1. Erdelyi, A., Higher Trascendental Function, 3 vols., Mc Graw-Hill, New York, 1953-1955.

2. Lebedev, N.N., Special Functions and Their Applications, Dover Publ. Co. New York (1992).

3. Watson, G.N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cabridge University Press, London, (1952).

4. Dattoli, G., Torre, A., Lorenzuta, S., Maino, G. and Chiccoli, C. Theory of Generalized Bessel Functions II. Nuovo Cimento B106 (1991), 21-51.

5. Chiccoli, C., Dattoli, G., Lorenzuta, S., Maino, G. and Torre, A., Theory of one-parameter generalized Bessel functions. Quaderni del Gruppo Nazionale per L'Informatica Matemática del CNR, No. 1, Firenze (1992), 1-47.

6. Ana Isolina Prieto, Josefina Matera, Leda Galué y Susana Salinas, Algunos resultados de la función de Bessel de tres variable y dos parámetros. Revista Tecnocientífica URU, No. 6, (Enero-Junio 2014), 31-41.

7. Dattoli, G., Chiccoli, C., Lorenzuta, S., Maino, G. and Torre, A., Generalized Bessel Functions and Generalized Hermite Polynomials. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 178, 509-516, (1993).

8. Dattoli, G., Torre, A., Lorenzuta, S. and Maino, G., Generalized forms of Bessel functions and Hermite polynomials. Ann Numer. Math. No. 2, (1995), 211-232.