Revista Tecnocientífica URU
Universidad Rafael Urdaneta
Facultad de Ingeniería
No. 12 Enero – Junio 2017
Depósito Legal: PPI 201402ZU4464
ISSN: 2343-6360

Método de planos de corte modificado para programación lineal entera en la toma de decisiones cuantitativas

Jenny Márquez A.[1,2.]

[1]Escuela de Ingeniería Industrial. Facultad de Ingeniería. Universidad Rafael Urdaneta. Maracaibo, Venezuela.
[2]Programa de Ingeniería. Núcleo LUZ-COL. Universidad del Zulia. Maracaibo, Venezuela.
jenny-astorga@hotmail.com
Recibido: 02-03-2016. Aceptado: 04-04-2017.

Resumen

El presente artículo se desarrolló con el fin de proponer un cambio en la metodología que se sigue al aplicar el método de plano de corte que ya se conoce como método de solución de los problemas de programación lineal, el cual facilita la toma de decisiones cuantitativas en casos donde el resultado del modelo matemático de programación lineal deba tener como objetivo variables con valores enteros. Los principales autores consultados fueron: Hillier (2010), Eppen y otros (2000) y Taha (1994), en cuanto a la metodología, su diseño es de campo y por el método se considera un modelo matemático, los resultados muestran los cambios en la metodología utilizada actualmente, además se indica que la aplicación de la metodología propuesta estaría limitada a resolver problemas con dos variables de decisión, sin importar el número de restricciones que tengan los problemas. Dicha propuesta se presenta sobre el hecho de que todas las posibles combinaciones de números enteros que cumplan con las restricciones del mismo y que no afecten la solución inicial del problema, pueden pertenecer al rango de soluciones factibles.

Palabras clave: Planos de corte, programación lineal entera, método matemático.

Modified cutting-plane method for integer linear programming in the making of quantitative decisions

Abstract

The present article was developed with the objective of proposing a change in the methodology that is followed when applying the cutting plane method, which is already known as a method of solving linear programming problems, which facilitates the making of quantitative decisions in Cases where the result of the mathematical model of linear programming must aim at variables with integer values. The main authors consulted were: Hillier (2010), Eppen et al. (2000) and Taha (1994), in terms of methodology, their design is field and by the method is considered a mathematical model, results show the changes in the methodology currently used, also indicates that the application of the proposed methodology would be limited to solve problems with two decision variables, regardless of the number of constraints that have the problems. This proposal is presented on the fact that all possible Combinations of integers that meet the constraints of the same and that do not affect the initial solution of the problem, may belong to the range of feasible solutions.

Keywords: Cutting-planes, integer linear programming, mathematical model.

Introducción

La resolución de problemas de programación lineal entera depende de la aplicación de diversos modelos matemáticos cuya implementación está limitada por sus restricciones, es por esto que el presente artículo tiene como objetivo principal proponer una modificación al método de plano de corte o planos cortantes utilizado para resolver problemas de toma de decisiones con modelos de programación lineal de 2 variables de decisión, considerando que las soluciones de dicho método deben cumplir con todas las restricciones o limitaciones que tenga el caso y su valor no puede afectar la solución inicial encontrada a través del método grafico o método simplex.

Aunado a esto, el hecho de que los métodos de programación lineal entera son métodos de aproximación, lo que permite que la variable de solución tenga cualquier valor, específicamente para los casos donde se tenga que maximizar el valor de la solución que pueda surgir de la aplicación del método en la solución final al aplicar planos de corte, esta solución debe tener un valor menor o igual al valor inicial, para el caso de minimizar debe ser lo contrario.

Según Hillier y Lieborman [1] existen muchos casos prácticos, donde las variables de decisión solo tienen sentido real si su valor es entero. Por ejemplo con frecuencia es necesario asignar a las actividades cantidades enteras de personas, maquinas o vehículos, si el hecho de exigir valores enteros es la única diferencia que tiene un problema con la formulación de programación lineal, entonces se trata de un problema de programación lineal entera

Fundamentos Teóricos

Programación lineal entera

Según Eppen et al. [2], existen ciertas situaciones reales donde los valores de las variables fraccionarias no se permiten o no serían lógicas ya que se necesitan con valores enteros, en esas situaciones una solución no entera puede adaptarse al requisito de integralidad redondeándola simplemente o truncando el resultado aproximándolo al entero más próximo, este método produce lo llamado solución redondeada, el uso de este tipo de soluciones es aceptable para aquellos casos en los que el redondeo no tenga importancia significativa, además cuanto más grandes sean los valores de las variables de decisión de la solución de programación lineal, tanto más probable será que una respuesta redondeada en valores enteros resulte aceptable en la práctica.

Para Eppen et al [2], la programación con enteros es una expresión general para describir los modelos matemáticos de programación que incluyen condiciones de integralidad (las condiciones en las cuales se estipula que algunas variables de decisión o todas deben tener valores enteros).

Métodos para resolver problemas de programación lineal entera

Según Taha [3], aunque se han creado algunos algoritmos para la programación lineal entera, ninguno de ellos es totalmente confiable desde el punto de vista de cálculo, sobre todo cuando el número de variables enteras se incrementa. La experiencia de cálculo de programación lineal entera, después de más de 30 años, permanece imprecisa. La dificultad de cálculo con los algoritmos disponibles ha conducido a los usuarios a buscar otros medios para resolver los problemas.

Además el Taha [3], afirma que existen dos métodos para generar las restricciones especiales que fuercen la solución óptima del problema de programación lineal relajado hacia una solución entera deseada: entre ellas se encuentran el método del plano de corte y el método de ramificación y acotamiento.

En ambos métodos las restricciones agregadas eliminan partes del espacio de solución, pero nunca alguno de los puntos enteros factibles, aunque ninguno de los dos métodos es completamente efectivo.

Izar [4], incluye dos métodos, el método de redondeo de la solución óptima de programación lineal, tal como su nombre lo indica, este método se basa en resolver en primer término el problema como programación lineal y luego redondear la solución obtenida hacia los enteros inmediatos inferiores para casos de maximización y hacia los enteros inmediatos superiores para casos de minimización y el método gráfico, este ultimo tiene una variante con respecto a la solución final ya que luego de aplicar el método gráfico tradicional donde no hay ninguna restricción de valor entero para la solución, acá si se identifican los puntos enteros mas próximos al limite de la zona de solución y una opción es unirlos mediante una línea de modo que habrá generado una nueva zona de solución formada por esta línea y los ejes, estando la solución factible en uno de los vértices.

Como se puede observar a continuación, la propuesta que se plantea en este articulo es una modificación del método de plano de corte que ya se conoce; el método original utiliza para la solución inicial el método simplex y la inclusión de nuevas restricciones que deben hacerse al mismo para continuar iterando hasta encontrar la solución entera final, mientras que en la modificación propuesta como se observa en los resultados mostrados más adelante, se utiliza como método base de solución inicial el gráfico, aunque no se desarrolla bajo la misma aplicación del método gráfico mencionado anteriormente por el autor [4], ya que a pesar de obtener la solución inicial del problema a través del gráfico se propone realizar cortes al área de solución factible, haciendo que estos cortes sean nuevas restricciones tal como lo define el método de plano de corte que se desarrolla a través del método simplex.

Metodología de investigación

El diseño de la investigación utilizada para el desarrollo de la presente propuesta es de campo y el método tratamiento matemático.

Según Tamayo [5], la investigación de campo se da cuando los datos se recogen directamente de la realidad, por lo cual su valor radica en que permite cerciorarse de las verdaderas condiciones en las que se han obtenido los datos, lo cual facilita su revisión o modificación en caso de surgir dudas.

Además, el presente artículo es considerado de campo ya que la aplicación del método de planos de corte se realiza directamente sobre los problemas de programación lineal que no cumplen en su solución inicial con la restricción de que las variables deben ser valores enteros.

Por último se considera modelo matemático ya que según Hurtado [6] los modelos matemáticos son aquellos que utilizan los símbolos numéricos y las relaciones matemáticas como medio de representación, por lo general toman la forma de ecuaciones, por lo que en el presente trabajo se muestra un método matemático para resolver un modelo, representando a través de ecuaciones e inecuaciones las posibles soluciones a problemas que se resuelven a través de relaciones matemáticas.

Resultados y propuesta

A continuación se explica la metodología propuesta para la aplicación del cambio del método de plano de corte:

1.- Inicialmente debe resolverse el problema de programación lineal usando el método gráfico (previamente debe formularse el problema según sea el caso para maximización o minimización), al obtener el resultado, como ya se mencionó anteriormente al menos una de las variables de la solución obtenida debe poseer un valor decimal o fraccionario, de lo contrario no tiene sentido la aplicación del método ya que se cumple automáticamente con el hecho de que el resultado debe poseer valores de números enteros.

2.- Luego dependiendo de la solución inicial (una o las dos variables decimales) se aplica el caso 2.1 o 2.2.

2.1- Para el caso en el que sólo existe una variable decimal en el resultado inicial:

2.1.1.- Automáticamente se inicia la aplicación del método con esta variable, es decir se buscan los valores enteros más cercanos a ella, el valor menor y mayor; dichos valores se consideran como líneas rectas paralelas al eje que no se encuentra contemplado en el valor de la variable y se grafican sobre el área obtenida previamente al buscar la solución inicial del problema, por ejemplo:

En un problema cuyo resultado o solución sea $X1 = 3.5$ y X2 es entero, X1 es la variable decimal, los valores enteros más cercanos son $X1= 3$ y $X1= 4$, ambos valores van a ser líneas rectas paralelas a X2 y se grafican como tales.

2.1.2.- Luego de graficar dichas rectas se buscan los puntos de corte o los puntos donde dichas rectas están cortando al gráfico o área de solución del problema (al hacer esto, se considera el hecho de que las líneas rectas que limitan al gráfico son las restricciones del problema, por lo que no se están tomando valores que no puedan estar cumpliendo con esta limitante para la solución aproximada), si el punto donde corta al gráfico tiene alguno de los valores decimales, automáticamente se descarta el punto.

2.1.3.- Si al verificar el valor del punto de corte los valores de las 2 variables dan números enteros, este punto o puntos se sustituyen en la ecuación de la función objetivo del problema para luego comparar el valor de la solución que se va a obtener con el valor de la solución inicial obtenida sobre la que se esta aplicando el método, considerando lo siguiente:

2.1.3.1.- para el caso de maximización, la solución obtenida con el método de plano de corte debe ser menor o igual al valor de la solución inicial.

2.1.3.2.- para el caso de minimización, la solución obtenida debe ser mayor o igual al valor de la solución inicial.

Ambas consideraciones se hacen ya que al resolver el problema de programación lineal, usando el método gráfico o el método simplex, se obtiene la solución óptima al problema haciendo la salvedad que no está cumpliendo con la restricción de que ambas variables deben tener como valor final números enteros y por ende la solución que se pueda obtener por cualquier otro método no debe ser ni mayor en el caso de maximizar ni menor en el caso de minimizar a los valores obtenidos previamente.

2.1.4.- Si al sustituir los puntos que puedan surgir luego de sustituir los valores enteros que se están tomando como rectas, resulta que más de un valor de estos puntos en la solución inicial cumplen con el paso anterior, se toma como solución del problema, aquel valor que este más cercano a la solución inicial.

2.1.5.- Si al sustituir los puntos que puedan surgir luego de sustituir los valores enteros que se están tomando como rectas, resulta que ninguno de los valores de estos puntos en la solución inicial cumplen con los pasos 2.1.3.1 o 2.1.3.2 se dice entonces que el problema no tiene solución entera por este método.

2.1- Para el caso en el que las dos variables son decimales:

2.1.1.- Para este caso se buscan los valores enteros más cercanos a ambas variables, los valores menores y mayores; dichos valores se consideran líneas rectas paralelas a los ejes y se grafican sobre el área obtenida previamente que resulta al buscar la solución inicial del problema; quedando como resultado un rectángulo, ya que al graficar todos los valores se está rodeando al punto de solución inicial, el cual debe quedar en la parte interna de dicho rectángulo.

2.1.2.- Luego de graficar dichas rectas se buscan los vértices del rectángulo que quedan en el área interna del rectángulo o que tocan al mismo, (al hacer esto se considera el hecho de que las líneas rectas que limitan al grafico son las restricciones del problema por lo que acá no se están considerando valores que no puedan estar cumpliendo con esta limitante para la solución aproximada), si el(los) punto(s) donde corta el grafico tiene(n) alguno(s) de los valores decimales, automáticamente se descarta el punto.

2.1.3.- Si al verificar el valor del punto de corte, los valores de las 2 variables dan números enteros, este punto o puntos se sustituyen en la ecuación de la función objetivo del problema para luego comparar el valor de la solución que se va a obtener con el valor de la solución inicial obtenida sobre la que se está aplicando el método, considerando lo siguiente:

2.1.3.1.- para el caso de maximización, la solución obtenida con el método de plano de corte debe ser menor o igual al valor de la solución inicial.

2.1.3.2.- para el caso de minimización, la solución obtenida debe ser mayor o igual al valor de la solución inicial.

Ambas consideraciones se hacen ya que al resolver el problema de programación lineal para obtener una primera solución, usando el método gráfico o el método simplex se está obteniendo la solución óptima al problema solo que no está cumpliendo con la restricción de que ambas variables deben poseer números enteros.

2.1.4.- Si al sustituir los puntos que puedan surgir luego de sustituir los valores enteros que se están tomando como rectas, resulta que más de un valor de estos puntos en la solución inicial cumplen con el paso anterior se toma como solución del problema aquel valor que este más cercano a la solución inicial.

Ejemplo de aplicación del método de planos de corte modificado

El problema a resolver es un caso en el que la solución que se obtiene como resultado inicial posee una variable decimal (caso ficticio solo para ejemplificar el método propuesto).

En una pastelería el principal problema que se presenta en el área de producción es el desperdicio de producto al final del día. El producto que no se vende durante la jornada se bota o se desecha, ya que éste es inaceptable para la venta. Esto genera pérdidas para la empresa. Ante eso, la empresa necesita determinar el volumen de la producción adecuado para obtener el mayor el beneficio posible y disminuir las pérdidas de materia prima

En repostería, los productos de mayor venta y producción son los pastelitos dulces y enrollados de leche condensada. Son elaborados con el mismo tipo de pasta (de hojaldre); La demanda de estos productos no es constante, y por lo tanto, la empresa no tiene métodos para estimarla ni determinar las cantidades por producir.

En la tabla No.1 se presentan los costos y precios de venta por unidad de repostería producida. Se consideran restricciones de producción, la pasta disponible (75 kg), las horas hombre (45 h-h) y la capacidad de almacenamiento (45 metros).

Tabla No. 1. Costos, precios de venta y ganancias para cada uno de los principales productos

Productos	**Costo**	**Precio de venta**	**Ganancia**
Pastelitos dulces (Variable X)	107 Bs	110 Bs	3 Bs
Enrollado de leche condensada (Variable Y)	99 Bs	100 Bs	1 Bs

La empresa cuenta con registros de los consumos de los dos productos, los cuales se han presentado los resultados en la siguiente tabla:

Tabla No.2. Datos de consumo de insumos

Insumos	**Pastelitos dulces (consumo de insumo)**	**Enrollados de leche condensada (consumo de insumo)**
Pasta (Kg)	1 kg/ pastelitos	2 kg/enrollados
Mano de obra (hh)	2 hh/pastelitos	3 hh/ enrollados
Almacenamiento (m)	1m/ 100 pastelitos	2 m/ 100 enrollados

Se requiere maximizar las ganancias por concepto de la venta de estos 2 productos los cuales corresponden a los principales productos en cuanto a volumen de producción y la utilidad que generan para la empresa; es decir, se debe obtener un valor óptimo de producción para los productos ya especificados. De esta forma, se lograría cubrir la demanda y evitar o disminuir los desperdicios.

Luego de identificar el problema y formularlo, siguiendo la metodología de programación lineal (no explicado en este artículo, ya que son procedimientos previos a la aplicación del método propuesto), resulta el siguiente problema:

La función objetivo del problema resulta como la maximización de las ganancias de sus 2 productos principales (en función y 4 restricciones entre ellas incluidas el hecho de que las variables deben ser positivas y enteras, como se pueden ver en las siguientes ecuaciones e inecuaciones:

Max $Z = 3X + Y$ (maximizar la ganancia) (1)

Sujeto A: (restricciones)

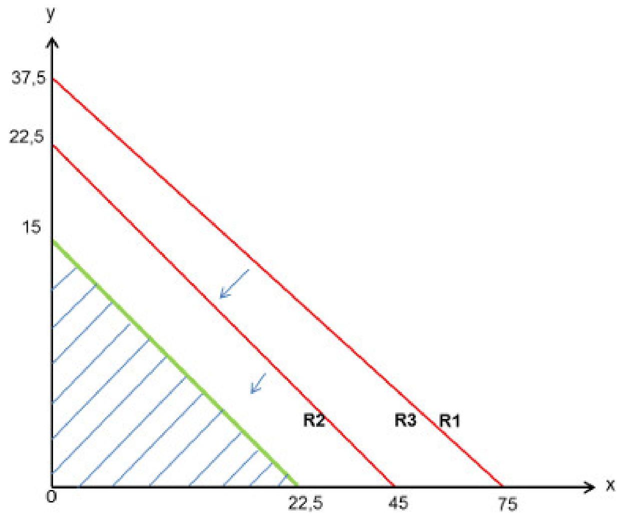
R1. $X + 2Y \leq 75$ (pasta disponible) (2)

R2. $2X + 3Y \leq 45$ (horas hombre) (3)

R3. $X + 2Y \leq 45$ (almacenamiento) (4)

R4. $X, Y \geq 0$, enteras (5)

1. Se obtiene como solución inicial al problema anterior aplicando cualquiera de los métodos conocidos como métodos de solución de problemas de programación lineal (método gráfico, método simplex o aplicando solver en Excel), siendo el área rayada el área de solución del problema resultando lo siguiente:



Solución inicial

X = 22,5 pastelitos; Y = 0 enrollados; Z = 67,5 la ganancia máxima

Figura 1. Solución inicial, método gráfico

Como se observa en la solución inicial (figura 1), una de las variables en la solución del problema tiene un valor decimal (X = 22,5), así que es por esta variable que se inicia la aplicación del método de plano de corte modificado.

Para la aplicación del método se observa que los valores enteros más cercanos a la variable X1 = 22,5 son 22 y 23, se grafican como rectas:

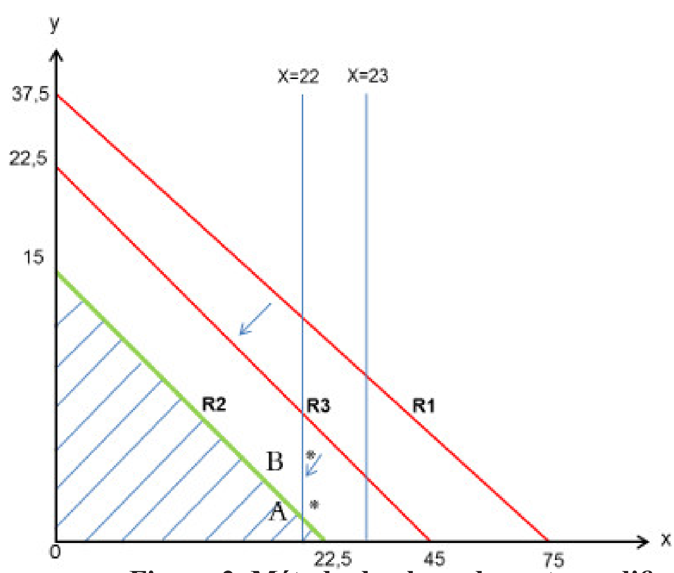


Figura 2. Método de plano de corte modificado

Siguiendo la metodología se buscan los puntos de corte de las rectas graficadas sobre el área que contempla la solución, en este caso los asteriscos marcan dos posibles puntos (*), se deben verificar los valores de Y para dichos puntos (es decir sus coordenadas), se identifican con las letras A y B a dichos puntos, las coordenadas de A (22,0) y las de B (22,11.5).

Se observa que solo uno de los dos puntos da como resultado valores enteros en ambas coordenadas (en este caso A), ahora se busca el valor de Z (sustituyendo las coordenadas en la función objetivo), Z = 66 (máxima ganancia obtenida).

A continuación se compara el valor de z obtenido luego de aplicar el método de planos de corte modificado con el valor inicial de la función objetivo, para el caso de maximizar este valor es menor, así que este resultado es óptimo ya que cumple con todas las restricciones del problema y el valor de Z es menor a la solución inicial.

Siendo la nueva solución Z = 66 (máxima ganancia), X = 22 pastelitos a producir, Y = 0 enrollados (es decir no se producen enrollados).

Conclusiones

Con la metodología propuesta se obtiene un resultado aceptable ya que como método de aproximación de programación lineal entero es sencillo, acotando que cuando el problema solo debe tener 2 variables de decisión.

Para el caso en el que la solución inicial posea una variable decimal, es necesario que para ser precisos en los valores de las variables que se obtienen luego de la aplicación de planos de corte, se calculen los valores de los cortes de las rectas con en el gráfico realizando un sistema de ecuaciones (en caso de ser necesario).

Para el caso en el que los valores de las dos variables al aplicar el método gráfico sean decimales, es más sencillo obtener los valores resultantes al aplicar planos de corte ya que, sólo serían considerados los valores de los vértices del rectángulo que se forma al graficar las aproximaciones de estos valores decimales.

Como se pudo observar, el método de planos de corte modificado da como resultados valores aproximados al resultado óptimo para un problema de programación lineal que cumplen con todas las restricciones del caso.

Bibliografía

Hillier F. y Lieberman G., Introducción a la investigación de operaciones, 9na edición, México (2010).

Eppen G., Gould F., Schmidt C., Moore J., Weatherford L., Investigación de operaciones en la ciencia administrativa, 5ta Edición, México (2000).

Taha H., Investigación de operaciones, 5ta Edición, México, (1994).

Izar, J., Investigación de operaciones, 1era Edición, México (2008).

Tamayo, M., El proceso de la Investigación Científica, México (2004).

Hurtado J., Metodología de la investigación, 4ta edición, Caracas (2010).