Revista Tecnocientífica URU
Universidad Rafael Urdaneta
Facultad de Ingeniería
Nº 1 Julio - Diciembre 2011
ISSN: 2244 - 775X / Depósito legal pp 201102ZU3863

Algunos resultados que envuelven la función hipergeométrica de Wright y el cálculo fraccional

Susana Salinas de Romero[1] y Carlos Segundo Muñoz Valencia[2]

[1] Centro de Investigación de Matemática Aplicada (C.I.M.A.).
Facultad de Ingeniería. Universidad del Zulia
Facultad de Ingeniería. Universidad Rafael Urdaneta

[2] Programa de Matemática Aplicada
Apartado Postal 10482.
E-mail: divipost@luz.edu.ve

Recibido 11-03-11 Aceptado 06-05-11

Resumen

En este artículo se presentan los resultados de la evaluación de integrales que envuelven la función hipergeométrica generalizada de Wright con la aplicación del cálculo fraccional. También se determinan el diferintegral de la función ${}_p\psi_q$ mediante el operador de cálculo fraccional de Saigo y el operador de cálculo fraccional de Kalla y Saxena.

Palabras clave: Integrales, cálculo fraccional, función hipergeomética gneralizada de Wright, operador de cálculo fraccional de Saigo, operador de cálculo fraccional de Kalla y Saxena.

Some results involving fractional calculus and Wright's generalized hypergeometric function

Abstract

This paper presents the results of evaluation of integral involving Wright's generalizad hypergeometric functions by the application of fraccional calculus. Also it determines the differintegral of the function ${}_p\psi_q$ through the Saigos's fractional calculus operator and Kalla and Saxena's fractional calculus operator.

Key words: Integrals, fractional calculus, Wright's generalized hypergeometric functions, Saigo' fractional calculus operator, Kalla and Saxena's fractional calculus operator.

Introducción

Los operadores de integración fraccional constituyen ecuaciones integrales y ecuaciones diferenciales con problemas de valores iniciales, y están relacionados con aplicaciones en diferentes campos como electromagnetismo, física, química, teoría de potencia, estadística, etc.

La función hipergeométrica generalizada de Wrigth ${}_p\psi_q$ es una generalización de la función hipergeométrica ${}_pF_q$, aparece en la solución de ecuaciones diferenciales y, además, se encuentra en diversas aplicaciones en Física: relajación fraccional, ecuación de difusión tiempo-fraccional, distribución de temperaturas en cilindros; en Estadística: funciones de densidad de probabilidad.

L. Galué [1] presenta deferintegrales de la función hipergeométrica generalizada de Wright. J. Matera y B. González [2] aplican el operador de Saigo a algunas funciones especiales. A. Prieto, S. Salinas y H. Srivastava [3], presentan algunos resultados de cálculo fraccional que involucran la función generalizada de Lommer-Wright y funciones relacionadas.

En este trabajo se evalúan integrales que envuelven la función hipergeométrica generalizada de Wright con la aplicación del cálculo fraccional; se determinan el diferintegral de la función ${}_p\psi_q$ mediante el operador de cálculo fraccional de Saigo [4] y el operador de cálculo fraccional de Kalla y Saxena [5].

Definiciones de algunos operadores de integración fraccional

Definición de Riemann-Liouville [6]

$$ {}_cD_x^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_c^x (x-t)^{-\alpha-1} f(t)dt; \quad \mathrm{Re}(\alpha) < 0 \tag{1}$$

$$ = \frac{d^{\alpha} f(x)}{dx^{\alpha}} = \frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{d^{\alpha-n}}{dx^{\alpha-n}} \right); \quad \mathrm{Re}(\alpha) \geq 0 \tag{2}$$

Definición de Nishimoto [7]

Si $f(z)$ es una función analítica que no tiene puntos ramales en el interior y sobre C; $C = \{C_-, C_+\}$, C_- es una curva integral a lo largo del corte que une los puntos z y $-\infty + \mathrm{Im}(z)$ y C_+ es una curva integral a lo largo del corte que une los puntos z y $\infty + \mathrm{Im}(z)$, entonces el diferintegral de la función f es [7, p. 4]:

$$ f_\nu = {}_c f_\nu(z) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i} \int_C \frac{f(\tau)}{(\tau - z)^{\nu+1}} d\tau; \quad \left(\nu \in \mathbb{R},\ \nu \notin \mathbb{Z}^-\right) \tag{3}$$

donde $\tau \neq z$, $-\pi \leq \arg(\tau - z) \leq \pi$ para C_- y $0 \leq \arg(\tau - z) \leq 2\pi$ para C_+, entonces f_ν ($\nu > 0$) es la derivada de orden fraccional ν, y f_ν ($\nu < 0$) es la integral de orden fraccional $|\nu|$, si f_ν existe.

Definición de Saigo

Saigo [4] presenta un operador de integración fraccional $(\mathrm{Re}(\alpha) > 0)$ y derivación fraccional $(\mathrm{Re}(\alpha) < 0)$ de la función $f(x)$ en $\mathbb{R}^+$, como:

$$ {}_0I_x^{\alpha,\beta,\eta} f = \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} {}_2F_1\left(\alpha+\beta, -\eta; \alpha; 1 - \frac{t}{x}\right) f(t)dt, \quad \mathrm{Re}(\alpha) > 0 \tag{4}$$

$$ = \frac{d^n}{dx^n} I_{0x}^{\alpha+n,\beta-n,\eta-n} f, \quad \mathrm{Re}(\alpha) \leq 0 \quad n = \|1-\alpha\| \tag{5}$$

donde ${}_2F(a,\ b;\ c;\ z)$ es la función hipergeométrica de Gauss, α, β y η son números complejos y $x \in \mathbb{R}^+$.

El operador de integración y derivación fraccional sobre un intervalo infinito viene dado por:

$$J_{x,\infty}^{\alpha,\beta,\eta} f = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{\infty} (t-x)^{\alpha-1} t^{-\alpha-\beta} {}_2F_1\left(\alpha+\beta,-\eta;\alpha;1-\frac{x}{t}\right) f(t)dt,\ \ \mathrm{Re}(\alpha)>0 \tag{6}$$

$$= (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} J_{x,\infty}^{\alpha+n,\beta-n,\eta-n} f, \quad \mathrm{Re}(\alpha \le 0),\ \ n = \| 1-\alpha \| \tag{7}$$

Para $\alpha = -\beta$ se tienen los operadores de Riemann.Liouville Weyl, respectivamente, en tanto que para $\beta = 0$ se obtienen los operadores de Erdélyi-Kober.

Definición de Kalla y Saxena

Kalla y Saxena [5, p. 231] definen los operadores de integración fraccional por

$$I[\alpha,\beta,\ \gamma;\ m,\ \mu,\ \eta,\ a; f(x)] = \frac{\mu x^{-\eta-1}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x F\left(\alpha,\ \beta+m;\ \gamma;\ \frac{at^{\mu}}{x^{\mu}}\right) t^{\eta} f(t)dt \tag{8}$$

$$R[\alpha,\beta,\ \gamma;\ m,\ \mu,\ \eta,\ a; f(x)] = \frac{\mu x^{\delta}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x F\left(\alpha,\ \beta+m;\ \gamma;\ \frac{ax^{\mu}}{t^{\mu}}\right) t^{-\delta-1} f(t)dt \tag{9}$$

donde $F(a,\ b;\ c;\ z)$ es la función hipergeométrica de Gauus, α, β, γ, μ, η, δ y a son parámetros complejos.

Definiciones de algunas funciones especiales

Función hipergeométrica generalizada ${}_pF_q$ [8]

$${}_pF_q(\alpha_1,\ \ldots,\alpha_p;\ \beta_1,\ \ldots,\beta_q;\ z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k \ldots (\alpha_p)_k\, z^k}{(\beta_1)_k \ldots (\beta_p)_k\, k!} \tag{10}$$

donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ y $\beta_1, \ldots, \beta_p$ son parámetros complejos, $\beta_1,\ \ldots,\beta_p \ne 0,\ -1,\ -2,\ \ldots$, p y q son enteros positivos o cero.

Función hipergeométrica generalizada de Wright ${}_p\psi_q$

Una interesante generalización de la serie ${}_pF_q$ fue introducida por el matemático E. M. Wright [10], quien consideró la siguiente función hipergeométrica generalizada:

$${}_p\psi_q\left[\begin{matrix}(a_1,\ A_1),\ \ldots,(a_p,\ A_p)\\ (b_1,\ B_1),\ \ldots,(b_q,\ B_q)\end{matrix};\ z\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(a_j+A_jk)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j+AB_j)} \frac{x^k}{k!} \tag{11}$$

donde los coeficientes $A_1, \dots, A_p$ y $B_1, \dots, B_q$ son números reales positivos tales que $1+\sum_{j=1}^{q} B_j - \sum_{j=1}^{p} A_j \geq 0$.

Como casos particulares de (11) tenemos [12, p. 230]

$$ {}_p\psi_q\left[\begin{matrix}(a_1,\,1),\,\dots,(a_p,\,1)\\(b_1,\,1),\,\dots,(b_q,\,1)\end{matrix};\,z\right]=\frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(a_j)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j)}\;{}_pF_q\left[\begin{matrix}a_1,\,\dots,a_p\\b_1,\,\dots,b_q\end{matrix};z\right] \tag{12}$$

La función hipergeométrica generalizada de Wright es un caso especial de la función *H* de Fox [10, p.2 No. (1.1.1)]

$$\begin{aligned} &{}_p\psi_q\left[\begin{matrix}(a_1,\,A_1),\,\dots,(a_p,\,A_p)\\(b_1,\,B_1),\,\dots,(b_q,\,B_q)\end{matrix};\,z\right]\\ &\qquad = H^{1,p}_{p,q+1}\left[-z\left|\begin{matrix}(1-a_1,\,A_1),\,\dots,(1-a_p,\,A_p)\\(0,\,1),\,(1-b_1,\,B_1),\,\dots,(1-b_q,\,B_q)\end{matrix}\right.\right]\end{aligned} \tag{13}$$

donde la función *H* se define por

$$H^{m,n}_{p,q}\left[z\left|\begin{matrix}(a_1,\,A_1),\,\dots,(a_p,\,A_p)\\(b_1,\,B_1),\,\dots,(b_q,\,B_q)\end{matrix}\right.\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_L \theta(s)z^s ds \tag{14}$$

donde $i=\sqrt{-1}$, $z\neq 0$ es una variable compleja y $z^s=\exp\{s[\ln|z|+i\arg z]\}$, $\ln|z|$ no es necesariamente el valor principal.

$$\theta(s)=\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-B_js)\prod_{j=1}^{m}\Gamma(1+a_j+A_js)}{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(1-b_j+B_js)\prod_{j=1}^{m}\Gamma(a_j-A_js)} \tag{15}$$

Representación integral de la función ${}_p\psi_q(z)$

$$ {}_p\psi_q\left[\begin{matrix}(a_1,\,A_1),\,\dots,(a_p,\,A_p)\\(b_1,\,B_1),\,\dots,(b_q,\,B_q)\end{matrix};\,z\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_{r-i\infty}^{r+i\infty}\frac{\Gamma(-s)\prod_{j=1}^{p}\Gamma(a_j+A_js)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j+B_js)}(-z)^s\,ds \tag{16}$$

Evaluación de integrales que envuelven la función ${}_p\psi_q(z)$ usando operadores de integración fraccional

1.) $$\int_0^\infty e^{-ax}\,{}_p\psi_q\left[\begin{matrix}(a_p,\,A_p)\\(b_q,\,B_q)\end{matrix};\,cx\right]dx=\frac{1}{a}\,{}_{p+1}\psi_q\left[\begin{matrix}(a_p,\,A_p),\ (1,\,1)\\(b_q,\,B_q)\end{matrix};\ \frac{c}{a}\right] \tag{17}$$

donde $a > 0$, $c\in\mathbb{R}$, $A_1,\ \ldots\ ,\ A_p$ y $B_1,\ \ldots\ ,\ B_q$ son números reales positivos tales que $1+\sum_{j=1}^{q}B_j-\sum_{j=1}^{p}A_j\geq 0$.

Demostración:

Sea $$I_1=\int_0^\infty e^{-ax}\,{}_p\psi_q\left[\begin{matrix}(a_p,\,A_p),\\(b_q,\,B_q)\end{matrix};\,cx\right]dx \tag{18}$$

Reemplazando (13) en (20), tenemos:

$$I_1=\int_0^\infty e^{-ax}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left(a_j+A_jk\right)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(b_j+B_jk\right)}\frac{(cx)^k}{k!}dx \tag{19}$$

Intercambiando el orden de la integral y la suma, válido por la convergencia absoluta de la serie, resulta:

$$I_1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left(a_j+A_jk\right)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(b_j+B_jk\right)}\frac{c^k}{k!}\int_0^\infty e^{-ax}x^k dx \tag{20}$$

Usando la definición de la función gamma [8], nos queda:

$$I_1=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left(a_j+A_jk\right)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(b_j+B_jk\right)}\frac{c^k}{k!}\frac{\Gamma(k+1)}{a^{k+1}} \tag{21}$$

Reescribiendo (21) en términos de la función ${}_p\psi_q$ definida en (11), se obtiene finalmente (17) bajo las condiciones establecidas.

Una integral indefinida que involucra la función $_p\psi_q$

2.) $$\int x^{\alpha-1}{}_p\psi_q\left[\begin{matrix}(a_p,\, A_p),\\ (b_q,\, B_q)\end{matrix};\, cx\right]dx = x^{\alpha}{}_{p+1}\psi_{q+1}\left[\begin{matrix}(a_p,\, A_p),\ (\alpha,\, 1)\\ (b_q,\, B_q),\ (\alpha+1,\, 1)\end{matrix};\, cx\right] \tag{22}$$

$$c\in\mathbb{R},\quad \mathrm{Re}(\alpha>0);\ \ 1+\sum_{j=1}^{q}B_j-\sum_{j=1}^{p}A_j\geq 0$$

Demostración:

Sea $$I_2=\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}{}_p\psi_q\left[\begin{matrix}(a_p,\, A_p),\\ (b_q,\, B_q)\end{matrix};\, cx\right]dx \tag{23}$$

Sustituyendo (11) en (23), se tiene:

$$I_2=\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(a_j+A_jk)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j+B_jk)}\frac{(cx)^k}{k!}dx \tag{24}$$

Intercambiando el orden de la integral y la suma por la convergencia absoluta de la serie,

$$I_2=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(a_j+A_jk)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j+B_jk)}\frac{c^k}{k!}\int_0^{\infty}x^{\alpha+l-1}x^k dx \tag{25}$$

Resolviendo la integral de la función potencia, y usando propiedad de la función Gamma [8, p. 16, No. (1.21)]

$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z),\quad \mathrm{Re}(z)>0;\ \ z\neq -1,\ -2,\ \dots\ , \tag{26}$$

tenemos:

$$I_2=x^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(a_j+A_jk)\Gamma(\alpha+k)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j+B_jk)\Gamma(\alpha+1+k)}\frac{c^k x^k}{k!} \tag{27}$$

Reescribiendo (27) en términos de la función $_p\psi_q$ definida en (11) se obtiene finalmente (22) con

$$c\in\mathbb{R},\quad \mathrm{Re}(\alpha>0);\ \ 1+\sum_{j=1}^{q}B_j-\sum_{j=1}^{p}A_j\geq 0$$

Aplicación del cálculo fraccional en la evaluación de integrales que envuelven la función $_p\psi_q$

$$3.)\ \int x^{\alpha-1}\ln^{\nu}(x)\,{}_p\psi_q\left[\begin{matrix}(a_p,\ A_p)\\ (b_q,B_q)\end{matrix};\ cx\right]dx = x^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\nu}{k}e^{-i\pi k}k!\ln^{\nu-k}x\ \cdot \tag{28}$$

$$\cdot\ {}_{p+k+1}\psi_{q+k+1}\left[\begin{matrix}(a_p,A_p),\ (\alpha,\ 1),\ \ldots\ ,(\alpha,\ 1)\\ (b_q,\ B_q),\ (\alpha+1,\ 1),\ \ldots\ ,(\alpha+1,\ 1)\end{matrix};\ cx\right]$$

donde $c\in\mathbb{R},\quad \mathrm{Re}(\alpha>0);\quad \mathrm{Re}(\nu)>0;\ \ 1+\sum_{j=1}^{q}B_j-\sum_{j=1}^{p}A_j\geq 0$.

Demostración:

$$\text{Sea } I_3=\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}{}_p\psi_q\left[\begin{matrix}(a_p,\ A_p),\\ (b_q,\ B_q)\end{matrix};\ cx\right]dx \tag{29}$$

Aplicando el diferintegral de Nishimoto de orden ν con respecto a α en (23) y teniendo en cuenta el resultado: [7, p. 19]

$$(a^z)_\nu=(\ln a)^\nu a^z\quad (a\neq 0,1),\ (z,\ \nu\in\mathbb{C}) \tag{30}$$

tenemos

$$I_3=\left(\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}{}_p\psi_q\left[\begin{matrix}(a_p,\ A_p),\\ (b_q,\ B_q)\end{matrix};\ cx\right]dx\right)_\nu \tag{31}$$

De acuerdo a (22), se tiene:

$$I_3=\left(x^{\alpha}{}_{p+1}\psi_{q+1}\left[\begin{matrix}(a_p,\ A_p),\ (\alpha,\ 1)\\ (b_q,\ B_q),\ (\alpha+1,\ 1)\end{matrix};\ cx\right]\right)_\nu \tag{32}$$

Usando la regla de Leibniz de la derivada fraccional del producto de dos funciones: [11, p. 95, No. (4.4.3]

$$D^{\mu}\left[f(t)g(t)\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\mu}{k}\left[D^k g(t)\right]\left[D^{\mu-k}f(t)\right],\quad \mu>0 \tag{33}$$

y la definición (11) queda

$$I_3=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\nu}{k}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(a_j+A_jn)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j+B_jn)}\frac{c^nx^n}{n!}\left[\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha+1+n)}\right]_k[x^{\alpha}]_{\nu-k} \tag{34}$$

Utilizando la propiedad de la función Gamma dada en (27) y derivando (36 con respecto a α, usando el operador fraccional de Nishimoto definido en (5), los resultados: [7, p. 28]

$$\left(z^{\alpha}\right)_{\nu}=e^{-i\pi\nu}\frac{\Gamma(\nu-a)}{\Gamma(-a)}z^{a-\nu},\ \left(\nu,\ z\in\mathbb{C}\right),\quad\left|\frac{\Gamma(\nu-a)}{\Gamma(-a)}\right|<\infty \tag{35}$$

y (31) nos conduce a

$$I_3=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\nu}{k}e^{.i\pi k}\Gamma(k+1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left(a_j+A_jn\right)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(b_j+B_jn\right)}\left[\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha+1+n)}\right]^{k+1}. \tag{36}$$

$$\cdot\frac{(cx)^n}{n!}x^{\alpha}\ln^{\nu-k}x$$

Reescribiendo (38) según la definición de la función ${}_p\psi_q$ dada en (11), se obtiene (29) con las condiciones establecidas.

$$2.)\ \int_0^{\infty}e^{-i\pi y}x^{\nu}e^{-ax}{}_p\psi_q\left[\begin{matrix}\left(a_p,\ A_p\right),\\ \left(b_q,\ B_q\right)\end{matrix};\ cx\right]dx \tag{37}$$

$$=\frac{e^{-i\pi y}}{a^{\nu+1}}{}_p\psi_q\left[\begin{matrix}\left(a_p,\ A_p\right),\ (\nu+1,\ 1)\\ \left(b_q,\ B_q\right)\end{matrix};\ \frac{c}{a}\right]$$

donde $c\in\mathbb{R},\quad \operatorname{Re}(\alpha>0);\ a>0;\ 1+\sum_{j=1}^{q}B_j-\sum_{j=1}^{p}A_j\geq 0$

Demostración:

$$\text{Sea } I_4=\int_0^{\infty}e^{-i\pi y}x^{\nu}e^{-ax}{}_p\psi_q\left[\begin{matrix}\left(a_p,\ A_p\right),\\ \left(b_q,\ B_q\right)\end{matrix};\ cx\right]dx \tag{38}$$

Aplicando el diferintegral de Nishimoto de orden ν con respecto a a en la integral (40) y de acuerdo a: [7, p. 16, No. (3.1)]

$$\left(e^{-ax}\right)_{\nu}=e^{-i\pi\nu}a^{\nu}e^{-ax},\ a\neq 0\ \left(z,\ \nu\in\mathbb{C}\right) \tag{39}$$

se tiene:

$$I_4=\int_0^{\infty}\left(e^{-ax}\right)_{\nu}{}_p\psi_q\left[\begin{matrix}\left(a_p,\ A_p\right),\\ \left(b_q,\ B_q\right)\end{matrix};\ cx\right]dx \tag{40}$$

Utilizando la regla de Leibniz, de la integral [11], tenemos:

$$I_4 = \left(\int_0^\infty e^{-ax} {}_p\psi_q \left[\begin{matrix} (a_p,\ A_p), \\ (b_q,\ B_q) \end{matrix} ;\ cx \right] dx \right) \tag{41}$$

empleando (18) y (21):

$$I_4 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{p} \Gamma(a_j + A_j k)}{\prod_{j=1}^{q} \Gamma(b_j + B_j k)} \frac{c^k}{k!} \frac{\Gamma(k+1)}{a^{k+1}} \right)_\nu \tag{42}$$

Usando el resultado (37):

$$I_4 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{p} \Gamma(a_j + A_j k)}{\prod_{j=1}^{q} \Gamma(b_j + B_j k)} \frac{c^k}{k!} e^{-i\pi\nu} \frac{\Gamma(\nu + k + 1)}{\Gamma(k+1)} e^{-(k+1)-\nu} \tag{43}$$

Simplificando algunos términos y escribiendo (45), según la definición de la función ${}_p\psi_q$ dada en (11), nos conduce al resultado (39) con

$$c \in \mathbb{R},\ a > 0;\ \ 1 + \sum_{j=1}^{q} B_j - \sum_{j=1}^{p} A_j \geq 0$$

Diferintegrales de la función ${}_p\psi_q$ usando el operador de Saigo

Aplicando el operador de Saigo $I_{0x}^{\alpha,\beta,\eta} f$, definido en (4), a la función ${}_p\psi_q$, se tiene:

$$I_{0x}^{\alpha,\beta,\eta}\, {}_p\psi_q(x) = \frac{x^{-\alpha-\chi}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \left[\begin{matrix} \alpha+\beta,\ -\eta \\ \alpha \end{matrix} ;\ 1 - \frac{t}{x} \right] \cdot$$

$$\cdot\, {}_p\psi_q \left[\begin{matrix} (a_p,\ A_p) \\ (b_q,\ B_q) \end{matrix} :\ t \right] dt \tag{44}$$

$$\operatorname{Re}(\alpha) > 0;\ \ 1 + \sum_{j=1}^{q} B_j - \sum_{j=1}^{p} A_j \geq 0$$

Usando (11), e intercambiando el orden de la integral y la suma por la convergencia absoluta de la serie,

$$I_{0x}^{\alpha,\beta,\eta}\,{}_p\psi_q(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left(a_j+A_jk\right)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(b_j+B_jk\right)k!}\frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}\cdot$$

$$\cdot\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}\alpha+\beta,\ -\eta\\ \alpha\end{matrix};\ 1-\frac{t}{x}\right]t^k dt \tag{45}$$

Reescribiendo (48) en términos del operador de Saigo definido en (4),

$$I_{0x}^{\alpha,\beta,\eta}\,{}_p\psi_q(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left(a_j+A_jk\right)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(b_j+B_jk\right)k!}I_{0x}^{\alpha,\beta,\eta}x^k \tag{46}$$

Teniendo en cuenta el resultado: [13, p. 191]

$$I_{0x}^{\alpha,\beta,\eta}x^k=\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\beta+\eta+1)}{\Gamma(k-\beta+1)\Gamma(k+\alpha+\eta+1)}x^{k-\beta},\ \ k>\beta-\eta-1 \tag{47}$$

se tiene:

$$I_{0x}^{\alpha,\beta,\eta}\,{}_p\psi_q=x^{-\beta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left(a_j+A_jk\right)\Gamma(k+1)\Gamma(k-\beta+\eta+1)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(b_j+B_jk\right)\Gamma(k-\beta+1)\Gamma(k+\alpha+\eta+1)}\frac{x^k}{k!} \tag{48}$$

Reescribiendo (51) mediante (11), se obtiene finalmente:

$$I_{0x}^{\alpha,\beta,\eta}\,{}_p\psi_q=x^{-\beta}\,{}_{p+2}\psi_{q+2}\left[\begin{matrix}\left(a_p,\ A_p\right),\ (1,\ 1),\ (-\beta+\eta+1,\ 1)\\ \left(b_p,\ B_p\right),\ (-\beta+1,\ 1),\ (\alpha+\eta+1,\ 1)\end{matrix};\ x\right] \tag{49}$$

bajo las condiciones escritas en (46).

Casos particulares

i) Si en (49), $p=2$ y $q=1$, se tiene

$$I_{0x}^{\alpha,\beta,\eta}\,{}_2\psi_2=x^{-\beta}\,{}_4\psi_3\left[\begin{matrix}\left(a_1,\ A_1\right),\ \left(a_2,\ A_2\right),\ (1,\ 1),\ (-\beta+\eta+1,\ 1)\\ \left(b_1,\ B_1\right),\ (-\beta+1,\ 1),\ (\alpha+\eta+1,\ 1)\end{matrix};\ x\right] \tag{50}$$

ii) De (50) con $A_1 = 1$, $A_2 = \tau$, $B_1 = \tau$, $a_1 = a$, $a_2 = b$ y $b_1 = c$

$$I_{0x}^{\alpha,\beta,\eta}\, {}_2R_1^{\tau} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{-\beta}\, {}_4\psi_3\left[\begin{matrix}(a_1,\ 1),\ (b,\ \tau),\ (1,\ 1),\ (-\beta+\eta+1,\ 1)\\ (c,\ \tau),\ (-\beta+1,\ 1),\ (\alpha+\eta+1,\ 1)\end{matrix};\ x\right] \tag{51}$$

iii) En (49 si $p = 1$, $q = 1$, $a_1 = a$, $b_1 = c$, $A_1 = \tau$ y $B_1 = \tau$

$$I_{0x}^{\alpha,\beta,\eta}\, {}_1\Phi_1^{\tau}(x) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} x^{-\beta}\, {}_3\psi_3\left[\begin{matrix}(a,\ \mathrm{T}),\ (1,\ 1),\ (-\beta+\eta+1,\ 1)\\ (c,\ \tau),\ (-\beta+1,\ 1),\ (\alpha+\eta+1,\ 1)\end{matrix};\ x\right] \tag{52}$$

donde ${}_1\Phi_1^{\tau}$ es la función hipergeométrica de Wright, $\tau > 0$.

iv)

$$I_{0x}^{\alpha,\beta,\eta}\, {}_pF_q = \frac{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j)}{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(a_j)} x^{-\beta}\, {}_{p+2}\psi_{q+2}\left[\begin{matrix}(a_p,\ 1),\ (1,\ 1),\ (-\beta+\eta+1,\ 1)\\ (b_q,\ 1),\ (-\beta+1,\ 1),\ (\alpha+\eta+1,\ 1)\end{matrix};\ x\right] \tag{53}$$

Reescribiendo (53) en términos de la función ${}_pF_q$, dada en (10):

$$\begin{aligned} I_{0x}^{\alpha,\beta,\eta}\, {}_pF_q(x) &= x^{-\beta}\frac{\Gamma(-\beta+\eta+1)}{\Gamma(-\beta+1)\Gamma(\alpha+\eta+1)}\cdot \\ &\cdot {}_{p+2}F_{q+2}\left[\begin{matrix}a_p,\ 1,\ -\beta+\eta+1\\ b_q,\ -\beta+1,\ \alpha+\eta+1\end{matrix};\ x\right]\end{aligned} \tag{54}$$

que coincide con el resultado: [2, p. 3, No. (3)] cuando $a = 0$, $\gamma = 1$ y $\lambda = 1$.

$$I_{0x}^{\alpha,\beta\eta} x^{\alpha}\, {}_mF_n\left[\begin{matrix}a_p\\ b_q\end{matrix};\ \lambda x^{\gamma}\right] = \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(-\beta+\eta+a+1)}{\Gamma(-\beta+a+1)\Gamma(\alpha+\eta+a+1)}\cdot$$

$$\cdot\, {}_{m+2\gamma}F_{n+2\gamma}\left[\begin{matrix}a_p,\ \Delta(\gamma;\ a+1),\ \Delta(\gamma;\ -\beta+\eta+a+1)\\ b_p,\ \Delta(\gamma;\ -\beta+a+1),\ \Delta(\gamma;\ \alpha+\eta+a+1)\end{matrix};\ \lambda x^{\gamma}\right] \tag{55}$$

donde $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, $\mathrm{Re}(\eta-\beta) > -1$; $a = 0, 1, 2, \dots$; $\gamma = 1, 2, \dots$ y $\Delta(\gamma,\ a) = \frac{a}{\gamma},\ \frac{a+1}{\gamma},\ \dots,\frac{a+\gamma+1}{\gamma}$.

Aplicación del operador de Kalla y Saxena a la función ${}_p\psi_q$

Aplicando el operador de Kalla y Saxena definido en (8) a la función ${}_p\psi_q$:

$$I\left[\alpha,\beta,\gamma;m;\mu,\eta,a;\,{}_p\psi_q\right]=\frac{\mu x^{-\eta-1}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x F\left(\alpha,\beta+m;\gamma;\frac{at^{\mu}}{x^{\mu}}\right)t^{\eta}\,{}_p\psi_q(t)dt \tag{56}$$

donde α, β, γ, η y a son parámetros complejos.

Sustituyendo ${}_p\psi_q$ por su expansión en serie dada en (11) e intercambiando el orden de la integral y suma, válido por la convergencia absoluta de la serie,

$$I\left[\alpha,\beta,\gamma;m;\mu,\eta,a;\,{}_p\psi_q\right]=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left(a_j+A_jk\right)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(b_j+B_jk\right)\Gamma(1-\alpha)}\frac{\mu x^{-\eta-1}}{k!}\int_0^x F\left(\alpha,\beta+m;\gamma;\frac{at^{\mu}}{x^{\mu}}\right)t^{\eta+k}\,{}_p\psi_q(t)dt \tag{57}$$

Sea $I_5=\int_0^x F\left(\alpha,\beta+m;\gamma;\frac{at^{\mu}}{x^{\mu}}\right)t^{\eta+k}dt$ (58)

Utilizando la definición (10) e intercambiando el orden de la integral y la suma por convergencia absoluta de la serie,

$$I_5=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+m)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+m+n)}{\Gamma(\gamma+n)n!}\frac{a^n}{x^{\mu n}}\int_0^x t^{\eta+k+\mu n}dt \tag{59}$$

Resolviendo la integral, tenemos:

$$I_5=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+m)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+m+n)}{\Gamma(\gamma+n)n!}\frac{a^n}{x^{\mu n}}\frac{x^{\eta+k+\mu n+1}}{\eta+k+\mu n+1} \tag{60}$$

Simplificando algunos términos, usando (27) y reescribiendo mediante (11)

$$I_5=\frac{\Gamma(\gamma)x^{\eta+k+1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+m)}\,{}_3\psi_2\left[\begin{matrix}(\alpha,\,1),\ (\beta+m,\,1)(\eta+k+1,\,\mu)\\(\gamma,\,1),\ (\eta+k+2,\,\mu)\end{matrix};\,a\right] \tag{61}$$

Sustituyendo (61) en (57), se tiene:

$$I\left[\alpha,\beta,\gamma;m;\mu,\eta,a;\,{}_p\psi_q\right]=$$

$$= \frac{\mu\Gamma(\gamma)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+m)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{p} \Gamma\left(a_j + A_j k\right)}{\prod_{j=1}^{q} \Gamma\left(b_j + B_j k\right) \Gamma(1-\alpha)} \frac{x^k}{k!} \cdot$$

$$\cdot {}_3\psi_2 \left[\begin{matrix} (\alpha,\ 1),\ (\beta+m,\ 1)(\eta+k+1,\ \mu) \\ (\gamma,\ 1),\ (\eta+k+2,\ \mu) \end{matrix} ;\ a \right] \tag{62}$$

donde α, β, γ, η y a son parámetros complejos.

Agradecimiento

Agradecemos al Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico de la Universidad del Zulia por su apoyo financiero.

Referencias bibliográficas

1. Galué, L. Differintegrals of Wright's generalized hypergeometric function. International Journal of Applied Mathematics, Vol. 10, No. 3 (2002) 255-267.
2. Matera J., y González B. El operador de Saigo aplicado a algunas funciones especiales. Centro de Investigación de Matemática Aplicada (C.I.M.A.). División de Postgrado. Facultad de Ingeniería. Universidad del Zulia. Maracaibo. 1998.
3. Prieto, A., Romero, S., y Srivastava, H. Some fractional-calculus results involving the generalized Lommel-Wright and related functions. Science Direct. Applied Mathematics Letters, 20 (2007) 17-22.
4. Saigo, M. A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric functions. Kyushu Univ. Math. Reports of College of General Education, Vol. 11 No. 2 (1978) 135.143.
5. Kalla, S., and Saxena, R. Integral operators involving hypergeometric functions. Math. Z., 108 (1969) 231-234.
6. Ross, B. Fractional Calculus and its Applications, Springer-Verlag. New York, 1975.
7. Nishimoto, K. Fractional Calculus. Descartes press. Koriyama, Japan, 1984.
8. Srivastava, H., and Karlsson, P. Multiple Gaussian Hipergeometric Series. John Wiley and Sons. New York, 1985.
9. Wright, E. The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function. J. London Math. Soc., 10 (1935) 286-293.
10. Mathai, A., and Saxena, R. The H function with Applications in Statistics and Other Disciplines. John Wiley & Sons. New York, 1978.
11. Miller, K., and Ross, B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. John Wiley & Sons. New York, 1993.
12. McBride, A., and Roach, G. Fractional Calculus. Pitman Advanced Publishing Program, Boston, 1985.