Revista Tecnocientífica URU
Universidad Rafael Urdaneta
Facultad de Ingeniería
Nº 1 Julio - Diciembre 2011
ISSN: 2244 - 775X / Depósito legal pp 201102ZU3863

Algunos resultados sobre la función de Bessel de dos índices y un parámetro

Leda Galué[1] y Greilyn Castillo[2]

[1] Universidad del Zulia. Facultad de Ingeniería.
Centro de Investigación de Matemática Aplicada
Apartado de Correo 10482, e-mail: lgalue@hotmail.com
Maracaibo, Venezuela

[2] Universidad Nacional Experimental Francisco de Miranda.
Área de Tecnología. Departamento de Hidráulica.
e-mail: greilyn@hotmail.com. Coro, Venezuela

Recibido 14-04-11 Aceptado 20-05-11

Resumen

Las aplicaciones de las funciones de Bessel en diferentes campos, tales como, física, iluminación, procesos multifotón, procesos de dispersión, radiación, análisis de grandes estructuras, etc. han motivado el desarrollo de una serie de investigaciones relativas a ellas. En este trabajo se presentan la definición de la función de Bessel de dos índices y un parámetro y algunas propiedades generales de esta función, entre las cuales están: las propiedades de simetría, las relaciones de recurrencia y las ecuaciones diferenciales que satisfacen estas funciones. Además se incluyen varias gráficas que ilustran el comportamiento de la función.

Palabras clave: Función de Bessel de dos índices y un parámetro, relación de recurrencia, ecuación diferencial.

Some results on Bessel function of two indexes and one-parameter

Abstract

The applications of the Bessel functions in various fields, such as, physics, illumination, multiphoton process, dispersion process, radiation, incommensurate structure analysis, etc., have lead the development of a series of investigations relative to them. In this paper the definition of the Bessel function of two indexes and one parameter is presented, and some of its general properties, among which are: symmetry properties, recurrence relations and differential equations that satisfy, are established. Also, various graphics are included which show the behavior of the function.

Key words: Bessel function of two indexes and one-parameter, recurrence relations, differential equation.

1. Introducción

Existen diferentes investigaciones que se han llevado a cabo en relación a las funciones de Bessel, entre éstas se tienen, C. Chiccoli et al. [1] proveen una visión unificada de la teoría de las funciones de Bessel ordinarias (BFs) y las funciones de Bessel generalizadas (GBFs), tomando en cuenta que las estructuras algebraicas esenciales de las GBFs pueden ser reconocidas en completa analogía con las de BFs. También G. Dattoli et al. [2] presentan un tratamiento unificado probando que muchas de las aparentes generalizaciones pueden ser vistas como casos particulares de una función de Bessel de dos variables del tipo de función introducida por Miller durante los años sesenta. G. Dattoli et al. [3] presentan un resumen de las teorías de las funciones de Bessel con mas de un índice y una o mas variables, tomando en cuenta su uso en aplicaciones. L. Galué [4] introduce las series Kapteyn para las funciones de Bessel generalizadas tomando en cuenta el uso de las series de Newman y Kapteyn en problemás específicos de física. G. Dattolli et al. [5] introducen un método para derivar familias de funciones generadoras de funciones de Bessel generalizadas y ordinarias. El método de la función generadora fue aplicado por L. Galué et al. [6] para obtener un teorema de multiplicación para la función cilíndrica generalizada de dos variables y un parámetro $J_n(\lambda x, \mu y; \tau)$ y dos teoremas de multiplicación para la función de Bessel de dos índices $J_{m,n}(\lambda x)$. M. A. Pathan et al. [7] obtienen funciones generadoras para la función de Bessel generalizada de un parámetro $J_n(x, y; \tau)$ usando la representación del grupo Lie T3. Recientemente, G. Castillo y L. Galué [8] presentan varios teoremas para funciones de Bessel de dos índices y un parámetro.

Las funciones de Bessel presentan diferentes aplicaciones, como por ejemplo, en procesos multifoton [9], en el tratamiento analítico de procesos de campo de iluminación especialmente en las teorías de ionización multifoton no-perturbada [10], en el análisis de procesos de dispersión para los cuales la aproximación bipolar no puede ser usada [11], en el campo de la radiación sincroton [12], en el análisis de grandes estructuras [13], etc.

En este trabajo se presentan la definición de la función de Bessel de dos índices y un parámetro y algunas propiedades generales de esta función, entre las cuales están: las propiedades de simetría, las relaciones de recurrencia y las ecuaciones diferenciales que satisfacen estas funciones. Además se incluyen varias gráficas que ilustran el comportamiento de la función.

2. Definición

La función de Bessel generalizada de dos índices y un parámetro $J_{m,n}(x;\tau)$ se define mediante la función generadora

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left[\left(u-\frac{1}{u}\right)+\left(v-\frac{1}{v}\right)+\left(\tau uv-\frac{1}{\tau uv}\right)\right]\right]=\sum_{m,\,n=-\infty}^{+\infty} u^m v^n J_{m,n}(x;\tau) \tag{1}$$

donde x es una variable real y u, v, c son parámetros complejos no cero con $|u|$, $|v|$, $|\tau| < \infty$.

Si en (1) se hace $\tau = 1$, se obtiene

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left[\left(u-\frac{1}{u}\right)+\left(v-\frac{1}{v}\right)+\left(uv-\frac{1}{uv}\right)\right]\right]=\sum_{m,\,n=-\infty}^{+\infty} u^m v^n J_{m,n}(x;1) \tag{2}$$

donde

$$\exp\left(\frac{x}{2}\left[\left(u-\frac{1}{u}\right)+\left(v-\frac{1}{v}\right)+\left(uv-\frac{1}{uv}\right)\right]\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} u^m v^n J_{m,n}(x) \tag{3}$$

y $J_{m,n}(x)$ es la función de Bessel generalizada de dos índices [14]. Así al comparar (2) con (3) se deduce que $J_{m,n}(x;1) = J_{m,n}(x)$.

2.1 Definición explícita

La definición explícita de $J_{m,n}(x;\tau)$ es la siguiente:

$$J_{m,n}(x;\tau)=\sum_{z,\,w=-\infty}^{+\infty}\sum_{k,\,t=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+2t-z-w}\,\tau^{t-k}}{2^{m+n+3(k+t)-2(z+w)}}\ \mathrm{x}$$

$$\frac{x^{m+n+3(k+t)-2(z+w)}}{\Gamma(m-z+k+1)\Gamma(n-w+k+1)\Gamma(t-z+1)\Gamma(t-w+1)k!t!}. \tag{4}$$

donde *x* es una variable real y *c* es un parámetro complejo con $0<|\tau|<\infty$.

Demostración

Aplicando las propiedades de la exponencial en el lado izquierdo de la ecuación (1),

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left[\left(u-\frac{1}{u}\right)+\left(v-\frac{1}{v}\right)+\left(\tau uv-\frac{1}{\tau uv}\right)\right]\right]=$$

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(u+v-\frac{1}{\tau uv}\right)\right]\exp\left[-\frac{x}{2}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}-\tau uv\right)\right] \tag{5}$$

y usando la definición de la exponencial para cada uno de los términos obtenidos arriba, se tiene

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(u+v-\frac{1}{\tau uv}\right)\right]=\exp\left(\frac{xu}{2}\right)\exp\left(\frac{xv}{2}\right)\exp\left(-\frac{x}{2\tau uv}\right)$$

$$=\sum_{p,q,k=0}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{p+q+k}\frac{x^{p+q+k}u^{p-k}v^{q-k}\,\tau^{-k}}{p!q!k!}$$

haciendo los siguientes cambios de índices

$$p=r+k,\qquad q=s+k$$

resulta

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(u+v-\frac{1}{\tau uv}\right)\right]=\sum_{r,\,s=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k x^{r+s+3k}u^r v^s\tau^{-k}}{2^{r+s+3k}\Gamma(r+k+1)\Gamma(s+k+1)k!}. \tag{6}$$

Aplicando el mismo procedimiento al segundo término de la ecuación (5)

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(-\frac{1}{u}-\frac{1}{v}+\tau uv\right)\right]=\exp\left(-\frac{x}{2u}\right)\exp\left(-\frac{x}{2v}\right)\exp\left(\frac{x\tau uv}{2}\right)$$

$$=\sum_{r,s,t=0}^{+\infty}(-1)^{r+s}\left(\frac{1}{2}\right)^{r+s+t}\frac{x^{r+s+t}u^{-r+t}v^{-s+t}\tau^t}{r!s!t!}$$

haciendo cambio de índices

$$r=t-z,\qquad s=t-w$$

se tiene

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(-\frac{1}{u}-\frac{1}{v}+\tau uv\right)\right]=\sum_{z,\,w=-\infty}^{+\infty}\sum_{t=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{-z-w}x^{3t-z-w}u^{z}v^{w}\tau^{t}}{2^{3t-z-w}\Gamma(t-z+1)\Gamma(t-w+1)t!} \tag{7}$$

sustituyendo (6) y (7) en (5),

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left[\left(u-\frac{1}{u}\right)+\left(v-\frac{1}{v}\right)+\left(\tau uv-\frac{1}{\tau uv}\right)\right]\right]=$$

$$\sum_{r,\,s,\,z,\,w=-\infty}^{+\infty}\sum_{k,\,t=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-z-w}\tau^{t-k}x^{r+s+3k+3t-z-w}u^{r+z}v^{s+w}}{2^{r+s+3k+3t-z-w}\Gamma(r+k+1)\Gamma(s+k+1)\Gamma(t-z+1)\Gamma(t-w+1)k!t!}$$

y al efectuar nuevamente cambio de índices, a saber,

$$r=m-z,\qquad s=n-w$$

se obtiene

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left[\left(u-\frac{1}{u}\right)+\left(v-\frac{1}{v}\right)+\left(\tau uv-\frac{1}{\tau uv}\right)\right]\right]=$$

$$\sum_{m,\,n,\,z,\,w=-\infty}^{+\infty}u^{m}v^{n}\sum_{k,t=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-z-w}\tau^{t-k}}{2^{m+n+3(k+t)-2(z+w)}\Gamma(m-z+k+1)}\times$$

$$\frac{x^{m+n+3(k+t)-2(z+w)}}{\Gamma(n-w+k+1)\Gamma(t-z+1)\Gamma(t-w+1)k!t!} \tag{8}$$

finalmente de (1) y (8) se obtiene la definición explícita (4) para la función $J_{m,n}(x;\tau)$.

3. Propiedades de simetría

Las propiedades de simetría para la función $J_{m,n}(x;\tau)$ son:

$$J_{m,n}(-x;\tau)=J_{-m,-n}\left(x;\frac{1}{\tau}\right)=(-1)^{m+n}J_{m,n}(x;-\tau) \tag{9}$$

$$J_{m,n}(-x;-\tau)=J_{-m,-n}\left(x;-\frac{1}{\tau}\right)=(-1)^{m+n}J_{m,n}(x;\tau) \tag{10}$$

$$J_{m,n}(-x;-\tau)=J_{-m,-n}\left(x;-\frac{1}{\tau}\right)=(-1)^{m+n}J_{m,n}(x;\tau) \tag{11}$$

Demostración

Ésta se basa en la representación de $J_{m,n}(x;\tau)$ en términos de una serie convergente presentada en [6, p. 144, No. (6)]

$$J_{m,n}(x;\tau)=\sum_{h=-\infty}^{\infty}\tau^{h}J_{m-h}(x)J_{n-h}(x)J_{h}(x) \tag{12}$$

donde $x\in\Re$ y c es un parámetro complejo con $0<|\tau|<\infty$, y las propiedades de simetría para una función de Bessel ordinaria [15]

$$J_{n}(-x)=J_{-n}(x)=(-1)^{n}J_{n}(x). \tag{13}$$

A continuación se presenta la obtención de cada una de estas propiedades:

1. De (12) y (13)

$$\begin{aligned}J_{m,n}(-x;\tau)&=\sum_{h=-\infty}^{\infty}\tau^{h}J_{m-h}(-x)J_{n-h}(-x)J_{h}(-x)\\&=\sum_{h=-\infty}^{\infty}\tau^{h}(-1)^{m-h}J_{m-h}(x)(-1)^{n-h}J_{n-h}(x)(-1)^{h}J_{h}(x)\\&=(-1)^{m+n}\sum_{h=-\infty}^{\infty}(-\tau)^{h}J_{m-h}(x)J_{n-h}(x)J_{h}(x)\end{aligned}$$

entonces

$$J_{m,n}(-x;\tau)=(-1)^{m+n}J_{m,n}(x;-\tau). \tag{14}$$

2. Sustituyendo en (12) c por $-\tau$ y usando (13)

$$\begin{aligned}J_{m,n}(x;-\tau)&=\sum_{h=-\infty}^{\infty}(-\tau)^{h}J_{m-h}(x)J_{n-h}(x)J_{h}(x)\\&=\sum_{h=-\infty}^{\infty}(-1)^{h}\tau^{h}J_{m-h}(x)J_{n-h}(x)J_{h}(x)\\&=\sum_{h=-\infty}^{\infty}\tau^{h}J_{-(-m+h)}(x)J_{-(-n+h)}(x)J_{-h}(x)\\&=\sum_{h=-\infty}^{\infty}\tau^{h}(-1)^{-m+h}J_{-m+h}(x)(-1)^{-n+h}J_{-n+h}(x)J_{-h}(x)\\&=\sum_{h=-\infty}^{\infty}\tau^{h}(-1)^{-m-n}J_{-m+h}(x)J_{-n+h}(x)J_{-h}(x)\end{aligned}$$

haciendo $h=-s$ resulta,

$$\begin{aligned}J_{m,n}(x;-\tau)&=\sum_{s=-\infty}^{\infty}\tau^{-s}(-1)^{-m-n}J_{-m-s}(x)J_{-n-s}(x)J_{s}(x)\\&=(-1)^{-(m+n)}J_{-m,-n}\left(x;\frac{1}{\tau}\right)\end{aligned} \tag{15}$$

De (14) y (15) se obtiene (9), de (9) y (15) se obtiene (10), y reemplazando en (9) τ por $-\tau$, o reemplazando en (10) x por $-x$ se puede obtener (11).

4. Relaciones de recurrencia

Las relaciones de recurrencia diferenciales para $J_{m,n}(x;\tau)$ son,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[x^n J_{m,n}(x;\tau)\right]=x^n J_{m,n-1}(x;\tau)+\tau x^n J_{m-1,n-1}(x;\tau)+\frac{x^n}{2}J_{m-1,n}(x;\tau)-\frac{x^n}{2}J_{m+1,n}(x;\tau). \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[x^m J_{m,n}(x;\tau)\right]=x^m J_{m-1,n}(x;\tau)+\tau x^m J_{m-1,n-1}(x;\tau)+\frac{x^m}{2}J_{m,n-1}(x;\tau)-\frac{x^m}{2}J_{m,n+1}(x;\tau). \quad (17)$$

La relación de recurrencia pura es,

$$\frac{2}{x}(m-n)J_{m,n}(x;\tau)=J_{m-1,n}(x;\tau)+J_{m+1,n}(x;\tau)-J_{m,n-1}(x;\tau)-J_{m,n+1}(x;\tau). \quad (18)$$

Demostración:

Sea w la función generadora dada en (1), esto es,

$$w=\exp\left[\frac{x}{2}\left[\left(u-\frac{1}{u}\right)+\left(v-\frac{1}{v}\right)+\left(\tau uv-\frac{1}{\tau uv}\right)\right]\right]=\sum_{m,\,n=-\infty}^{+\infty}u^m v^n J_{m,n}(x;\tau). \quad (19)$$

Derivando w con respecto de u

$$\frac{\partial w}{\partial u}=\exp\left[\frac{x}{2}\left[\left(u-\frac{1}{u}\right)+\left(v-\frac{1}{v}\right)+\left(\tau uv-\frac{1}{\tau uv}\right)\right]\right]\frac{x}{2}\left[\left(1+\frac{1}{u^2}\right)+\left(\tau v+\frac{1}{\tau u^2 v}\right)\right]$$

esto es,

$$\frac{\partial w}{\partial u}=w\frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{u^2}+\tau v+\frac{1}{\tau u^2 v}\right)$$

el cual puede escribirse como,

$$u^2\frac{\partial w}{\partial u}-u^2 w\frac{x}{2}-w\frac{x}{2}-w\frac{x}{2}\tau v u^2-w\frac{x}{2\tau v}=0$$

sustituyendo w por la expresión en el lado derecho de (19)

$$\sum_{m,\,n=-\infty}^{+\infty}mu^{m+1}v^n J_{m,n}(x;\tau)-\frac{x}{2}\sum_{m,\,n=-\infty}^{+\infty}u^{m+2}v^n J_{m,n}(x;\tau)-\frac{x}{2}\sum_{m,\,n=-\infty}^{+\infty}u^m v^n J_{m,n}(x;\tau)-$$
$$\frac{x}{2}\tau\sum_{m,\,n=-\infty}^{+\infty}u^{m+2}v^{n+1}J_{m,n}(x;\tau)-\frac{x}{2\tau}\sum_{m,\,n=-\infty}^{+\infty}u^m v^{n-1}J_{m,n}(x;\tau)=0 \quad (20)$$

realizando cambios de índices en (20) resulta, después de agrupar términos,

$$\sum_{m,\,n=-\infty}^{+\infty}u^m v^n\left[(m-1)J_{m-1,n}(x;\tau)-\frac{x}{2}J_{m-2,n}(x;\tau)-\frac{x}{2}J_{m,n}(x;\tau)-\right.$$
$$\left.\frac{x}{2}\tau J_{m-2,n-1}(x;\tau)-\frac{x}{2\tau}J_{m,n+1}(x;\tau)\right]=0.$$

Por lo tanto, se concluye que

$$(m-1)J_{m-1,n}(x;\tau)-\frac{x}{2}J_{m-2,n}(x;\tau)-\frac{x}{2}J_{m,n}(x;\tau)-\frac{x}{2}\tau J_{m-2,n-1}(x;\tau)-\frac{x}{2\tau}J_{m,n+1}(x;\tau)=0 \tag{21}$$

esto es,

$$\frac{2}{x}mJ_{m,n}(x;\tau)=J_{m-1,n}(x;\tau)+J_{m+1,n}(x;\tau)+\tau J_{m-1,n-1}(x;\tau)+\frac{1}{\tau}J_{m+1,n+1}(x;\tau). \tag{22}$$

De manera similar, derivando w con respecto a v se tiene:

$$(n-1)J_{m,n-1}(x;\tau)-\frac{x}{2}J_{m,n-2}(x;\tau)-\frac{x}{2}J_{m,n}(x;\tau)-\frac{x}{2}\tau J_{m-1,n-2}(x;\tau)-\frac{x}{2\tau}J_{m+1,n}(x;\tau)=0 \tag{23}$$

esto es,

$$\frac{2}{x}nJ_{m,n}(x;\tau)=J_{m,n-1}(x;\tau)+J_{m,n+1}(x;\tau)+\tau J_{m-1,n-1}(x;\tau)+\frac{1}{\tau}J_{m+1,n+1}(x;\tau). \tag{24}$$

Derivando w con respecto a x

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\exp\left[\frac{x}{2}\left[\left(u-\frac{1}{u}\right)+\left(v-\frac{1}{v}\right)+\left(\tau uv-\frac{1}{\tau uv}\right)\right]\right]\frac{1}{2}\left[\left(u-\frac{1}{u}\right)+\left(v-\frac{1}{v}\right)+\right.$$
$$\left.\left(\tau uv-\frac{1}{\tau uv}\right)\right]=\frac{w}{2}\left[\left(u-\frac{1}{u}\right)+\left(v-\frac{1}{v}\right)+\left(\tau uv-\frac{1}{\tau uv}\right)\right]$$

donde se usó (19).

Sustituyendo w en términos de la serie

$$\sum_{m,\,n=-\infty}^{+\infty}u^m v^n\frac{\partial}{\partial x}J_{m,n}(x;\tau)-\frac{1}{2}\sum_{m,\,n=-\infty}^{+\infty}u^{m+1}v^n J_{m,n}(x;\tau)+\frac{1}{2}\sum_{m,\,n=-\infty}^{+\infty}u^{m-1}v^n J_{m,n}(x;\tau)-$$
$$\frac{1}{2}\sum_{m,\,n=-\infty}^{+\infty}u^m v^{n+1}J_{m,n}(x;\tau)+\frac{1}{2}\sum_{m,\,n=-\infty}^{+\infty}u^m v^{n-1}J_{m,n}(x;\tau)-\frac{\tau}{2}\sum_{m,\,n=-\infty}^{+\infty}u^{m+1}v^{n+1}J_{m,n}(x;\tau)+$$
$$\frac{1}{2\tau}\sum_{m,\,n=-\infty}^{+\infty}u^{m-1}v^{n-1}J_{m,n}(x;\tau)=0,$$

efectuando cambio de índices

$$\sum_{m,\,n=-\infty}^{+\infty}u^m v^n\frac{\partial}{\partial x}J_{m,n}(x;\tau)-\frac{1}{2}\sum_{m,\,n=-\infty}^{+\infty}u^m v^n J_{m-1,n}(x;\tau)+\frac{1}{2}\sum_{m,\,n=-\infty}^{+\infty}u^m v^n J_{m+1,n}(x;\tau)-$$
$$\frac{1}{2}\sum_{m,\,n=-\infty}^{+\infty}u^m v^n J_{m,n-1}(x;\tau)+\frac{1}{2}\sum_{m,\,n=-\infty}^{+\infty}u^m v^n J_{m,n+1}(x;\tau)-\frac{\tau}{2}\sum_{m,\,n=-\infty}^{+\infty}u^m v^n J_{m-1,n-1}(x;\tau)+$$
$$\frac{1}{2\tau}\sum_{m,\,n=-\infty}^{+\infty}u^m v^n J_{m+1,n+1}(x;\tau)=0$$

por lo tanto,

$$\frac{\partial}{\partial x}J_{m,n}(x;\tau)-\frac{1}{2}J_{m-1,n}(x;\tau)+\frac{1}{2}J_{m+1,n}(x;\tau)-\frac{1}{2}J_{m,n-1}(x;\tau)+\frac{1}{2}J_{m,n+1}(x;\tau)-$$

$$\frac{\tau}{2}J_{m-1,n-1}(x;\tau)+\frac{1}{2\tau}J_{m+1,n+1}(x;\tau)=0. \qquad (25)$$

Multiplicando (24) y (25) por x^n se obtiene respectivamente

$$nx^{n-1}J_{m,n}(x;\tau)-\frac{x^n}{2}J_{m,n-1}(x;\tau)-\frac{x^n}{2}J_{m,n+1}(x;\tau)-\frac{x^n}{2}\tau J_{m-1,n-1}(x;\tau)-\frac{x^n}{2\tau}J_{m+1,n+1}(x;\tau)=0 \qquad (26)$$

$$x^n\frac{\partial}{\partial x}J_{m,n}(x;\tau)-\frac{x^n}{2}J_{m-1,n}(x;\tau)+\frac{x^n}{2}J_{m+1,n}(x;\tau)-\frac{x^n}{2}J_{m,n-1}(x;\tau)+\frac{x^n}{2}J_{m,n+1}(x;\tau)-$$

$$\frac{x^n\tau}{2}J_{m-1,n-1}(x;\tau)+\frac{x^n}{2\tau}J_{m+1,n+1}(x;\tau)=0. \qquad (27)$$

Ahora, sumando (26) y (27) se obtiene, después de simplificar,

$$nx^{n-1}J_{m,n}(x;\tau)+x^n\frac{\partial}{\partial x}J_{m,n}(x;\tau)-x^nJ_{m,n-1}(x;\tau)-\tau x^nJ_{m-1,n-1}(x;\tau)-$$

$$\frac{x^n}{2}J_{m-1,n}(x;\tau)+\frac{x^n}{2}J_{m+1,n}(x;\tau)=0,$$

dado que los dos primeros términos corresponden a $\frac{\partial}{\partial x}\left[x^nJ_{m,n}(x;\tau)\right]$, se obtiene entonces la relación de recurrencia diferencial (16).

De manera análoga multiplicando (24) y (25) por x^m, se obtiene la relación de recurrencia diferencial (17).

Restando (24) de (22) se establece la relación de recurrencia pura (18).

Sumando (22) y (24) se tiene el siguiente resultado importante que será utilizado en la próxima sección,

$$\frac{2}{x}(m+n)J_{m,n}(x;\tau)=J_{m-1,n}(x;\tau)+J_{m+1,n}(x;\tau)+J_{m,n-1}(x;\tau)+J_{m,n+1}(x;\tau)+$$

$$2\tau J_{m-1,n-1}(x;\tau)+\frac{2}{\tau}J_{m+1,n+1}(x;\tau). \qquad (28)$$

5. Ecuaciones diferenciales

A continuación se presentan las ecuaciones diferenciales que satisfacen las funciones de Bessel de dos índices y un parámetro, a saber,

$$J_{m-1,n}(x;\tau)+J_{m,n-1}(x;\tau)=\left[\left(\frac{m+n}{x}+\frac{\partial}{\partial x}\right)-\frac{2\tau}{x}\frac{\partial}{\partial\tau}\right]J_{m,n}(x;\tau)-$$

$$\frac{\tau}{2}J_{m-1,n-1}(x;\tau)+\frac{1}{2\tau}J_{m+1,n+1}(x;\tau) \tag{29}$$

$$J_{m+1,n}(x;\tau)+J_{m,n+1}(x;\tau)=\left[\left(\frac{m+n}{x}-\frac{\partial}{\partial x}\right)-\frac{2\tau}{x}\frac{\partial}{\partial\tau}\right]J_{m,n}(x;\tau)+$$

$$\frac{\tau}{2}J_{m-1,n-1}(x;\tau)-\frac{1}{2\tau}J_{m+1,n+1}(x;\tau). \tag{30}$$

Demostración

De (25)

$$\frac{\partial}{\partial x}J_{m,n}(x;\tau)=\frac{1}{2}\Big[J_{m-1,n}(x;\tau)-J_{m+1,n}(x;\tau)+J_{m,n-1}(x;\tau)-J_{m,n+1}(x;\tau)+$$

$$\tau\, J_{m-1,n-1}(x;\tau)-\frac{1}{\tau}J_{m+1,n+1}(x;\tau)\Big]. \tag{31}$$

Por otro lado, de (19)

$$\frac{\partial w}{\partial\tau}=\exp\left[\frac{x}{2}\left[\left(u-\frac{1}{u}\right)+\left(v-\frac{1}{v}\right)+\left(\tau uv-\frac{1}{\tau uv}\right)\right]\right]\left[\frac{x}{2}\left(uv+\frac{1}{\tau^{2}uv}\right)\right]$$

$$=\frac{wx}{2}\left(uv+\frac{1}{\tau^{2}uv}\right)$$

el cual equivale a

$$\sum_{m,\,n=-\infty}^{+\infty}u^{m}v^{n}\frac{\partial}{\partial\tau}J_{m,n}(x;\tau)-\frac{x}{2}\sum_{m,\,n=-\infty}^{+\infty}u^{m+1}v^{n+1}J_{m,n}(x;\tau)-\frac{x}{2\tau^{2}}\sum_{m,\,n=-\infty}^{+\infty}u^{m-1}v^{n-1}J_{m,n}(x;\tau)=0.$$

haciendo cambio de índices

$$\sum_{m,\,n=-\infty}^{+\infty}u^{m}v^{n}\frac{\partial}{\partial\tau}J_{m,n}(x;\tau)-\frac{x}{2}\sum_{m,\,n=-\infty}^{+\infty}u^{m}v^{n}J_{m-1,n-1}(x;\tau)-\frac{x}{2\tau^{2}}\sum_{m,\,n=-\infty}^{+\infty}u^{m}v^{n}J_{m+1,n+1}(x;\tau)=0$$

de donde,

$$\frac{\partial}{\partial\tau}J_{m,n}(x;\tau)-\frac{x}{2}J_{m-1,n-1}(x;\tau)-\frac{x}{2\tau^{2}}J_{m+1,n+1}(x;\tau)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}J_{m,n}(x;\tau)=\frac{x}{2}\left[J_{m-1,n-1}(x;\tau)+\frac{1}{\tau^{2}}J_{m+1,n+1}(x;\tau)\right] \tag{32}$$

sustituyendo esta expresión en (28),

$$\frac{(m+n)}{x}J_{m,n}(x;\tau)=\frac{1}{2}\left[J_{m-1,n}(x;\tau)+J_{m+1,n}(x;\tau)+J_{m,n-1}(x;\tau)+J_{m,n+1}(x;\tau)\right]+$$

$$\frac{2\tau}{x}\frac{\partial}{\partial\tau}J_{m,n}(x;\tau). \tag{33}$$

Sumando (31) y (33):

$$J_{m-1,n}(x;\tau)+J_{m,n-1}(x;\tau)=\frac{(m+n)}{x}J_{m,n}(x;\tau)+\frac{\partial}{\partial x}J_{m,n}(x;\tau)-$$

$$\frac{\tau}{2}J_{m-1,n-1}(x;\tau)+\frac{1}{2\tau}J_{m+1,n+1}(x;\tau)-\frac{2\tau}{x}\frac{\partial}{\partial\tau}J_{m,n}(x;\tau),$$

al agrupar finalmente se obtiene (29).

Al restar (31) de (33) se obtiene

$$\frac{(m+n)}{x}J_{m,n}(x;\tau)-\frac{\partial}{\partial x}J_{m,n}(x;\tau)=J_{m+1,n}(x;\tau)+J_{m,n+1}(x;\tau)-\frac{\tau}{2}J_{m-1,n-1}(x;\tau)+$$

$$\frac{1}{2\tau}J_{m+1,n+1}(x;\tau)+\frac{2\tau}{x}\frac{\partial}{\partial\tau}J_{m,n}(x;\tau)$$

el cual corresponde a (30).

6. Representación gráfica

En esta sección se presentan algunas figuras que muestran el comportamiento de $J_{m,n}(x;\tau)$ para diferentes valores de m, n y τ.

De la Figura 1 se aprecia que $J_{1,0}(x;\tau)=-J_{1,0}(-x;-\tau)$, mientras que de la Figura 2 se tiene que $J_{1,-1}(x;\tau)=J_{1,0}(-x;-\tau)$. Estos resultados concuerdan con lo establecido en la relación (9).

La Figura 3 y la Figura 4 muestran claramente la relación $J_{m,n}(x;1)=J_{m,n}(x)$, y se corresponden con las gráficas conocidas para $J_{m,n}(x)$. [16]

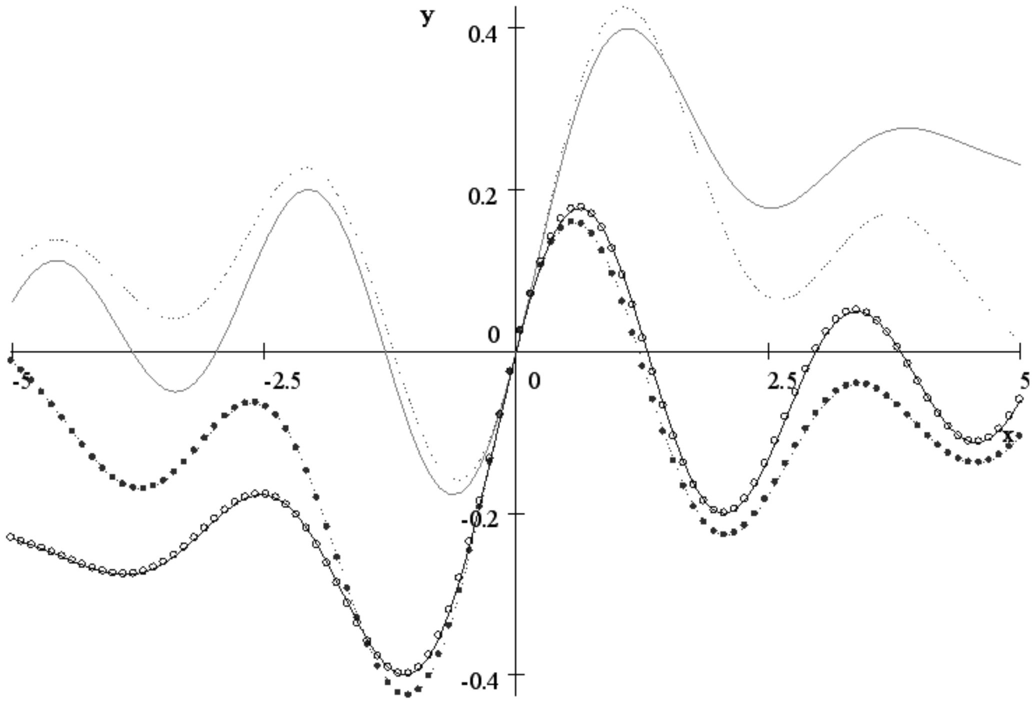

Figura 1. $J_{1,0}(x;\tau)$ para diferentes valores de τ

$---\ \tau=-1$	—— $\tau=-\frac{3}{4}$	$-\circ-\circ-$ $\tau=\frac{3}{4}$	$-\bullet-\bullet-$ $\tau=1$

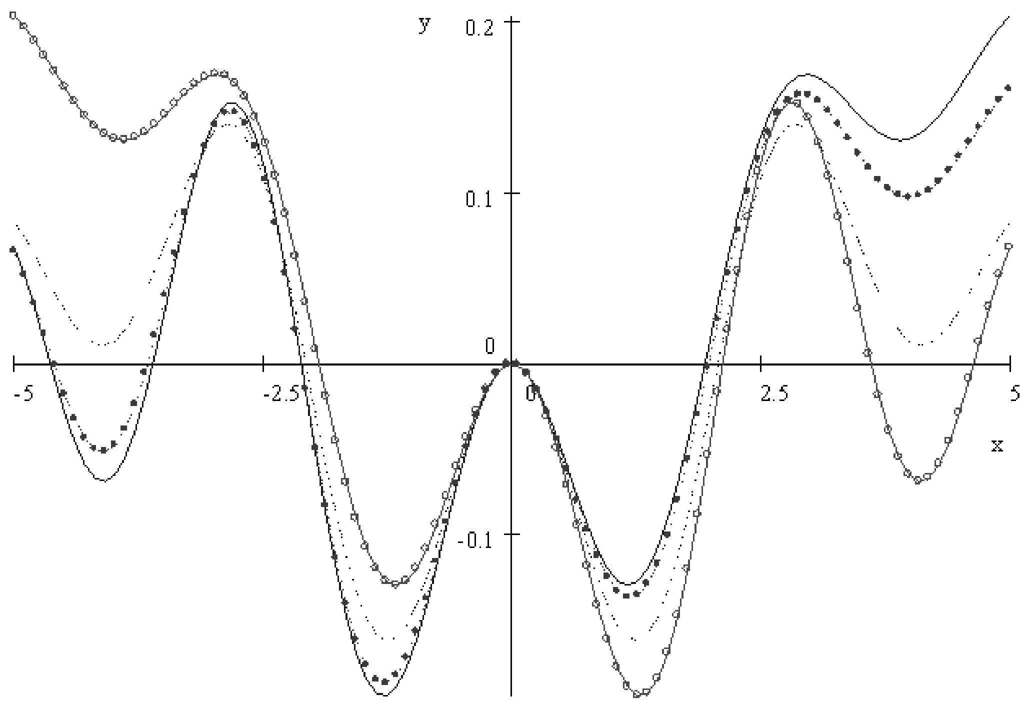

Figura 2. $J_{1,-1}(x;\tau)$ para diferentes valores de τ

$---\ \tau=1$	—— $\tau=-\frac{3}{4}$	$-\circ-\circ-$ $\tau=\frac{3}{4}$	$-\bullet-\bullet-$ $\tau=\frac{5}{4}$

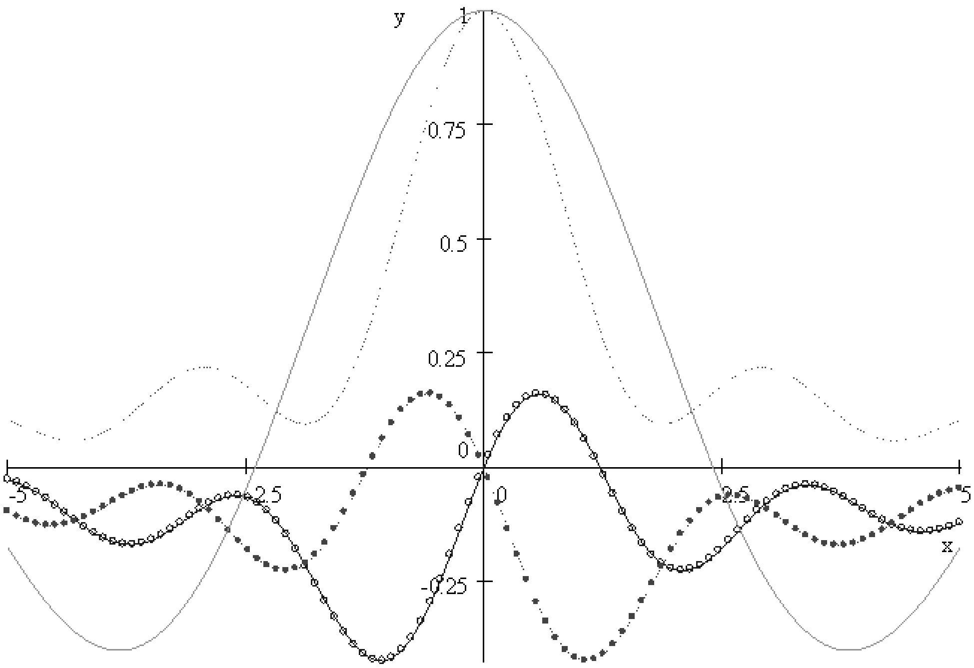

Figura 3. Comparación de $J_{0,n}(x;1)$ con $J_0(x)$ para diferentes valores de *n*

$-\circ-\circ-$ $n=1$	$---$ $n=0$	$-\bullet-\bullet-$ $n=-1$	—— $J_0(x)$

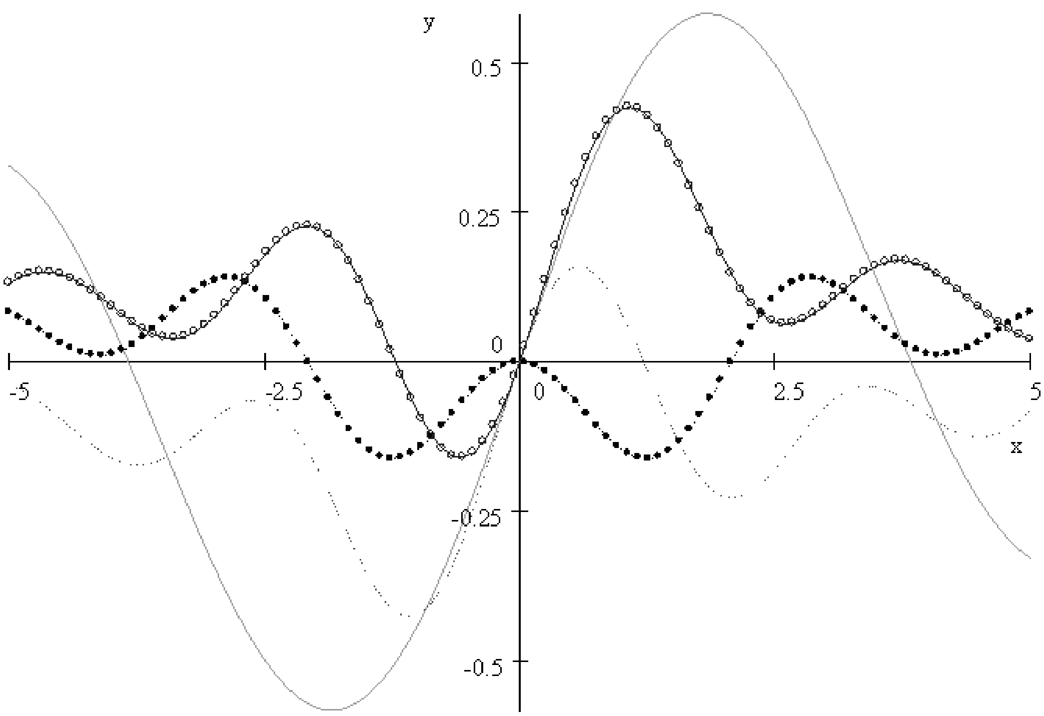

Figura 4. Comparación de $J_{1,n}(x;1)$ con $J_1(x)$ para diferentes valores de n

$-\circ-\circ-$ $n=1$	$---$ $n=0$	$-\bullet-\bullet-$ $n=-1$	—— $J_1(x)$

7. Referencias bibliográficas

1. Chiccoli, C., Lorenzutta, S., Maino, G., Dattoli, G. and Torre, A., Generalized Bessel functions: a group theoretic view, Reports on Mathematical Physics, Vol. 33, No. 1-2, (1993), 241-252.

2 Dattoli, G., Maino, G., Chiccoli, C., Lorenzutta, S. and Torre, A., A unified point of view on the theory of generalized Bessel functions, Computers & Mathematics with Applications, Vol. 30, No. 7, (1995), 113-125.

3. Dattoli, G., Ricci, P. E. and Pacciani, P., Comments on the theory of Bessel functions with more than one index, Applied Mathematics and Computation, Vol. 150, No. 3, (2004), 603-610.

4. Galué , L., Kapteyn series for generalized Bessel functions, International Journal of Applied Mathematics, Vol. 7, No. 2, (2001), 159-167.

5. Dattoli, G., Migliorati, M. and Srivastava, H. M., Bessel summation formulae and operational methods, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 173, No. 1, (2005), 149-154.

6. Galué, L., Khajah, H. G. and Kalla, S.L., Multiplication theorems for generalized and double-index Bessel functions, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 118, No. 1-2, (2000), 143-150.

7. Pathan, M. A., Goyal, A. N. and Shahwan, M. J. S., Lie-theoretic generating functions of multivariable generalized Bessel functions, Reports on Mathematical physics, Vol. 39, No. 2, (1997), 249-254.

8. Castillo, G. y Galué , L., Teoremas para funciones de Bessel de dos índices y un parámetro, Revista Colombiana de Matemáticas, Vol. 44, No. 1, (2010), 65-78.

9. Dattoli, G., Chiccoli, C., Lorenzutta, S., Maino, G., Richetta, M. and Torre, A., Advances on the theory of generalized Bessel function and applications to multiphoton processes, Journal of Scientific Computing, Vol. 8, No. 1, (1993), 69-109.

10. Reiss, H. R. and Krainov, V. P., Generalized Bessel functions in tunneling ionization, Journal of Physics Mathematical and General, Vol. 36, No. 20, (2003), 5575-5585.

11. Dattoli, G., Giannessi, L., Mezi, L. and Torre, A., Theory of generalized Bessel functions, Journal II Nuovo Cimento, Vol. 105, No. 3, (1990), 327-348.

12. Dattoli, G., Chiccoli, C., Lorenzutta, S., Maino, G. and Torre, A., Generalized Bessel functions of the Anger type and applications to physical problems, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 184, No. 2, (1994), 201-221.

13. Paciorek, W. A. and Chapuis, G., Generalized Bessel functions in incommensurate structure analysis, Foundations of Crystallography, Vol. 50, No. 2, (1994), 194-203.

14. Dattoli, G., Lorenzutta, S., Maino, G., Torre, A., Voykov, G. and Chiccoli, C., Theory of two-index Bessel functions and applications to physical problems, Journal of Mathematics and Physics, Vol. 35, (1994), 3636-3649.

15. Lebedev, N. N., Special Functions and Their Applications, Dover Publications Inc., New York, (1972).

16. Dattoli, G., Torre, A., Lorenzutta, S. and Maino, G., Generalised forms of Bessel functions and Hermite polynomials, Annals of Numerical Mathematics, Vol. 2, (1995), 211-232.