

Representación integral de la función de Bessel de dos índices y un parámetro

Leda Galué¹ y Greilyn Castillo²

¹Centro de Investigación de Matemática Aplicada
Universidad del Zulia. Facultad de Ingeniería
Apartado de Correo 10482; e-mail: *lgalue@hotmail.com*
Maracaibo, Venezuela

²Universidad Nacional Experimental Francisco de Miranda
Área de Tecnología. Departamento de Hidráulica.
e-mail: *greilyn@hotmail.com*
Coro, Venezuela

Recibido: 10-12-12 Aceptado: 08-02-2013

Resumen

Las aplicaciones de las funciones de Bessel en diferentes campos, tales como física, iluminación, procesos multifotón, procesos de dispersión, radiación, análisis de grandes estructuras, etc. han motivado el desarrollo de una serie de investigaciones relativas a ellas. En este trabajo se presenta la representación integral de la función de Bessel de dos índices y un parámetro, la cual es utilizada para generar varias gráficas que ilustran el comportamiento de la función.

Palabras clave: Función de Bessel de dos índices y un parámetro, representación integral, representación gráfica.

Integral representation of the Bessel function of two indexes and one parameter

Abstract

The applications of the Bessel functions in various fields, such as, physics, illumination, multiphoton process, dispersion process, radiation, incommensurate structure analysis, etc., have lead the development of a series of investigations relative to them. In this paper the integral representation of the Bessel function of two indexes and one parameter is presented, the same is used in order of generate various graphics which show the behavior of the function.

Key words: Bessel function of two indexes and one parameter, integral representation, graphic representation.

Introducción

Las funciones especiales han tenido mucha importancia, no solamente por gozar de un desarrollo teórico independiente, sino también por contar con innumerables aplicaciones en la matemática, en la física y en la ingeniería [1]. Entre las funciones especiales más utilizadas se encuentran las funciones de Bessel debido a que surgen en la solución de ecuaciones diferenciales en matemática, física, química, ingeniería y otras ramas de la ciencia y la tecnología, en virtud de lo cual son de suma importancia para científicos e ingenieros [2].

Debido a la importancia que tienen estas funciones es necesario analizarlas a fin de conocer en detalle su comportamiento analítico el cual permite resolver una amplia variedad de problemas [1]. Diversos autores han realizado este tipo de estudio entre los que se encuentran: Dattoli, G., Migliorati, M. y Srivastava, H. M. [3], Galué, L. [4,5], Galué, L., Khajah, H.G. y Kalla, S. L. [2], Pathan, M. A., Goyal, A. N. y Shahwan, M. J. S. [6], Dattoli, G., Torre, A. y Carpanese, M. [7], Dattoli, G. y col. [8,9], Castillo, G. y Galué, L. [10], Galué, L. y Castillo, G. [11]. En estas investigaciones se estudiaron diferentes funciones de Bessel determinando funciones generadoras, ecuaciones diferenciales, teorema de adición, teoremas de multiplicación, teorema de Graf, relaciones de recurrencia, entre otros resultados importantes para ser usados en las aplicaciones.

Además, varios autores han realizado estudios del comportamiento analítico de algunas funciones de Bessel tomando en cuenta también sus aplicaciones: Reiss, H. R. y Krainov, V. P. [12] desarrollan dos nuevas aproximaciones para las funciones de Bessel generalizadas que frecuentemente se presentan en el tratamiento analítico de procesos de campo de iluminación especialmente en las teorías de ionización multifotón no-perturbada. Galué, L. [13] introduce las series Kapteyn para las funciones de Bessel generalizadas tomando en cuenta el uso de las series de Newman y Kapteyn en problemas específicos de física. Dattoli, G. y col. [14] discuten la importancia de las funciones de Bessel generalizadas (GBF) en procesos multifotón. Dattoli, G. y col. [15] analizan la teoría de funciones de Bessel generalizadas y su importancia en el análisis de procesos de dispersión para los cuales la aproximación bipolar no puede ser usada. Dattoli, G. y col. [16] introducen las funciones de Bessel generalizadas del tipo Anger (GAF) y discuten sus propiedades y aplicaciones en el campo de la radiación sincrotrón. Paciorek, W. A. y Chappuis, G. [17] proponen una posible aplicación de las funciones de Bessel generalizadas para análisis de grandes estructuras.

Función de Bessel generalizada de dos índices y un parámetro

La función de Bessel generalizada de dos índices y un parámetro $J_{m,n}(x; \tau)$ se define mediante la función generadora [18]

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left[\left(u - \frac{1}{u}\right) + \left(v - \frac{1}{v}\right) + \left(\tau uv - \frac{1}{\tau uv}\right)\right]\right] = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} u^m v^n J_{m,n}(x; \tau) \quad (1)$$

donde x es una variable real y u, v, τ son parámetros complejos no cero con $|u|, |v|, |\tau| < \infty$.

Si en (1) se hace $\tau = 1$, se obtiene

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left[\left(u - \frac{1}{u}\right) + \left(v - \frac{1}{v}\right) + \left(uv - \frac{1}{uv}\right)\right]\right] = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} u^m v^n J_{m,n}(x; 1) \quad (2)$$

donde $J_{m,n}(x; 1) \equiv J_{m,n}(x)$ denota la función de Bessel de dos índices.

3. Representación integral de la función $J_{m,n}(x; \tau)$

La representación integral de la función $J_{m,n}(x; \tau)$ está dada por:

$$J_{m,n}(x; e^{i\varphi}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos[-xsen\theta - xsen\alpha - xsen(\theta + \varphi + \alpha) + m\theta + n\alpha] d\theta d\alpha - \frac{i}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} sen[-xsen\theta - xsen\alpha - xsen(\theta + \varphi + \alpha) + m\theta + n\alpha] d\theta d\alpha \quad (3)$$

donde $x \in \mathfrak{R}$.

Demostración

Usando la función generadora (1)

$$\exp\left(\frac{x}{2}\left[\left(u - \frac{1}{u}\right) + \left(v - \frac{1}{v}\right) + \left(\tau uv - \frac{1}{\tau uv}\right)\right]\right) = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} u^m v^n J_{m,n}(x; \tau)$$

con

$$u = e^{i\theta}, \quad v = e^{i\alpha}, \quad \tau = e^{i\varphi}$$

resulta

$$\exp\left(\frac{x}{2}\left[\left(e^{i\theta} - \frac{1}{e^{i\theta}}\right) + \left(e^{i\alpha} - \frac{1}{e^{i\alpha}}\right) + \left(e^{i(\varphi+\theta+\alpha)} - \frac{1}{e^{i(\varphi+\theta+\alpha)}}\right)\right]\right) = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} e^{im\theta} e^{in\alpha} J_{m,n}(x; e^{i\varphi}) \quad (4)$$

Restando las identidades de Euler

$$\exp(i\theta) = \cos\theta + isen\theta$$

$$\exp(-i\theta) = \cos\theta - isen\theta$$

(5)

se obtienen los siguientes resultados

$$e^{i\theta} - \frac{1}{e^{i\theta}} = 2isen\theta$$

$$e^{i\alpha} - \frac{1}{e^{i\alpha}} = 2isen\alpha$$

$$e^{i(\varphi+\theta+\alpha)} - \frac{1}{e^{i(\varphi+\theta+\alpha)}} = 2isen(\varphi + \theta + \alpha),$$

y al sustituir en (4) queda

$$\exp\left(xi[sen\theta + sen\alpha + sen(\varphi + \theta + \alpha)]\right) = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} e^{i(m\theta+n\alpha)} J_{m,n}(x; e^{i\varphi}) \quad (6)$$

Usando la Serie de Fourier de $f(x)$ en su forma compleja, [19]

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp\left(\frac{in\pi x}{L}\right) \quad (7)$$

donde $f(x)$ está definida en el intervalo $(-L, L)$ y

$$C_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) \exp\left(-\frac{in\pi x}{L}\right) dx, \quad (8)$$

entonces de (6) y (7) con $L = \pi$ se tiene

$$C_m = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\alpha} J_{m,n}(x; e^{i\varphi})$$

Luego de acuerdo a (8)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\alpha} J_{m,n}(x; e^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(xi[\text{sen}\theta + \text{sen}\alpha + \text{sen}(\theta + \varphi + \alpha)]\right) \exp(-im\theta) d\theta,$$

y aplicando nuevamente (7) al lado izquierdo de la ecuación anterior, se obtiene

$$C_n = J_{m,n}(x; e^{i\varphi}),$$

por lo tanto, de (8) resulta

$$J_{m,n}(x; e^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(xi[\text{sen}\theta + \text{sen}\alpha + \text{sen}(\theta + \varphi + \alpha)]\right) \times \\ \exp(-im\theta) d\theta \exp(-in\alpha) d\alpha$$

Ahora, usando la identidad de Euler dada en (5)

$$J_{m,n}(x; e^{i\varphi}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos[-x\text{sen}\theta - x\text{sen}\alpha - x\text{sen}(\theta + \varphi + \alpha) + m\theta + n\alpha] - \right. \\ \left. i\text{sen}[-x\text{sen}\theta - x\text{sen}\alpha - x\text{sen}(\theta + \varphi + \alpha) + m\theta + n\alpha] \right) d\theta d\alpha, \quad (9)$$

y separando las integrales se obtiene (3).

El resultado (9) puede escribirse como

$$J_{m,n}(x; \tau) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos[-x\text{sen}\theta - x\text{sen}\alpha - x\text{sen}(\theta + \alpha) \cos\varphi - \right. \\ \left. x \cos(\theta + \alpha) \text{sen}\varphi + m\theta + n\alpha] - i\text{sen}[-x\text{sen}\theta - x\text{sen}\alpha - \right. \\ \left. x\text{sen}(\theta + \alpha) \cos\varphi - x \cos(\theta + \alpha) \text{sen}\varphi + m\theta + n\alpha] \right) d\theta d\alpha, \quad (10)$$

donde $\tau = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\text{sen}\varphi$.

Casos particulares:

Consideremos los siguientes casos particulares, los cuales serán de utilidad en la próxima sección.

i) Si $\phi = 0 \Rightarrow \tau = 1$, y

$$J_{m,n}(x;1) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos[-x\text{sen}\theta - x\text{sen}\alpha - x\text{sen}(\theta + \alpha) + m\theta + n\alpha] d\theta d\alpha \quad (11)$$

ii) Si $\phi = \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tau = \pm i$, y

$$J_{m,n}(x;\pm i) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos \left[-x\text{sen}\theta - x\text{sen}\alpha - x\text{sen} \left(\theta \pm \frac{\pi}{2} + \alpha \right) + m\theta + n\alpha \right] \right. \\ \left. - i\text{sen} \left[-x\text{sen}\theta - x\text{sen}\alpha - x\text{sen} \left(\theta \pm \frac{\pi}{2} + \alpha \right) + m\theta + n\alpha \right] \right] d\theta d\alpha. \quad (12)$$

iii) Si $\phi = \pm \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tau = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$, y

$$J_{m,n} \left(x; \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos \left[-x\text{sen}\theta - x\text{sen}\alpha - x\text{sen} \left(\theta \pm \frac{\pi}{4} + \alpha \right) + m\theta + n\alpha \right] \right. \\ \left. - i\text{sen} \left[-x\text{sen}\theta - x\text{sen}\alpha - x\text{sen} \left(\theta \pm \frac{\pi}{4} + \alpha \right) + m\theta + n\alpha \right] \right] d\theta d\alpha \quad (13)$$

iv) Si $\phi = \pm\pi \Rightarrow \tau = -1$, y

$$J_{m,n}(x;-1) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos[-x\text{sen}\theta - x\text{sen}\alpha + x\text{sen}(\theta + \alpha) + m\theta + n\alpha] d\theta d\alpha. \quad (14)$$

Representación Gráfica

En esta sección se presentan algunas figuras que muestran el comportamiento de $J_{m,n}(x;\tau)$ para diferentes valores de m, n y τ , con $-5 \leq x \leq 5$.

Para todas las Figuras se usará la siguiente notación: $J \equiv J_{m,n}(x;\tau)$

Resulta interesante mencionar que la Figura 1, que muestra el comportamiento de $J_{-1,n}(x;1) = J_{-1,n}(x)$ para diferentes valores de n , corresponde con la gráfica conocida para $J_{-1,n}(x)$ [20].

Figura 1. $J_{-1,n}(x;1)$ para diferentes valores de n

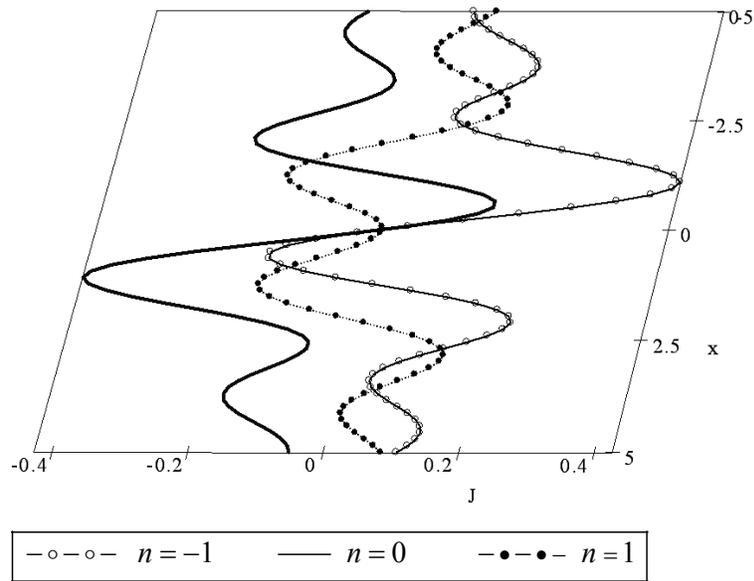


Figura 2. $J_{-1,n}(x;-i)$ para diferentes valores de n

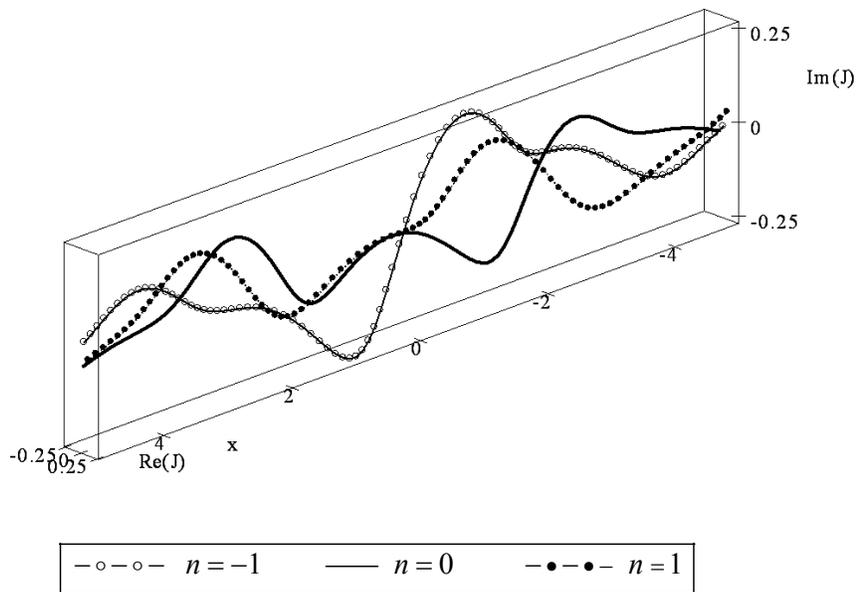


Figura 3. $J_{-1,n}(x;i)$ para diferentes valores de n

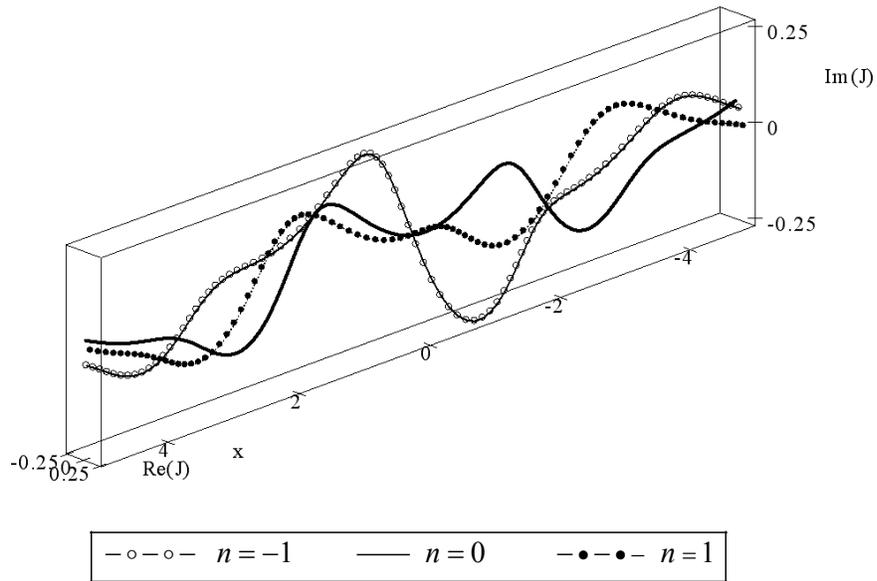


Figura 4. $J_{-1,n}(x;-1)$ para diferentes valores de n

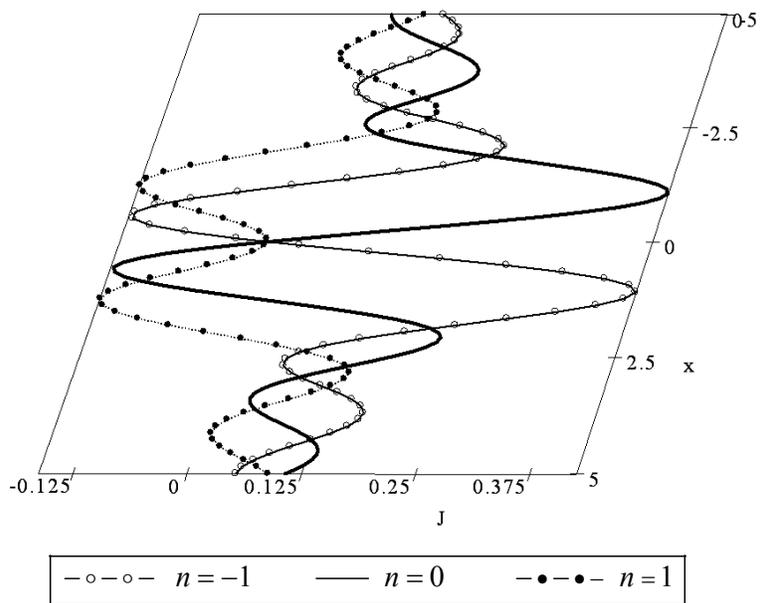
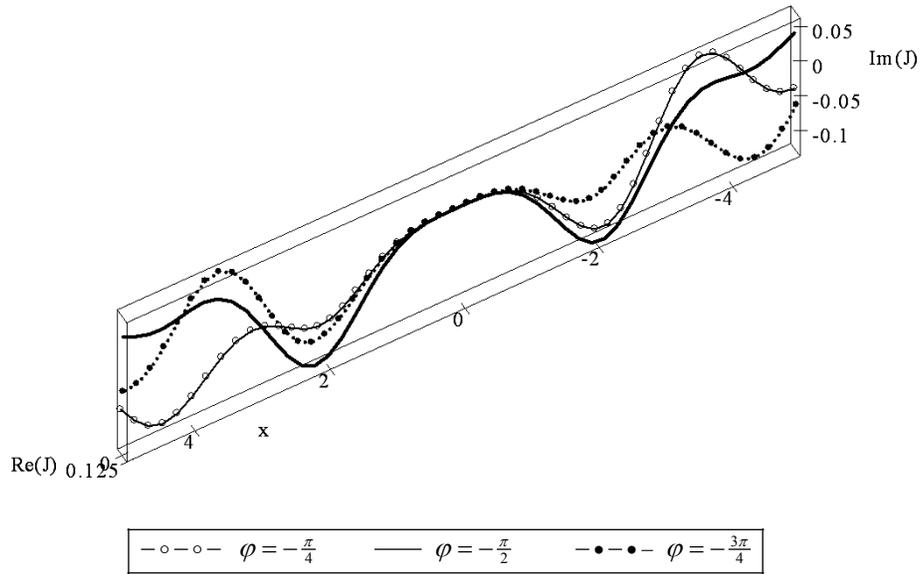
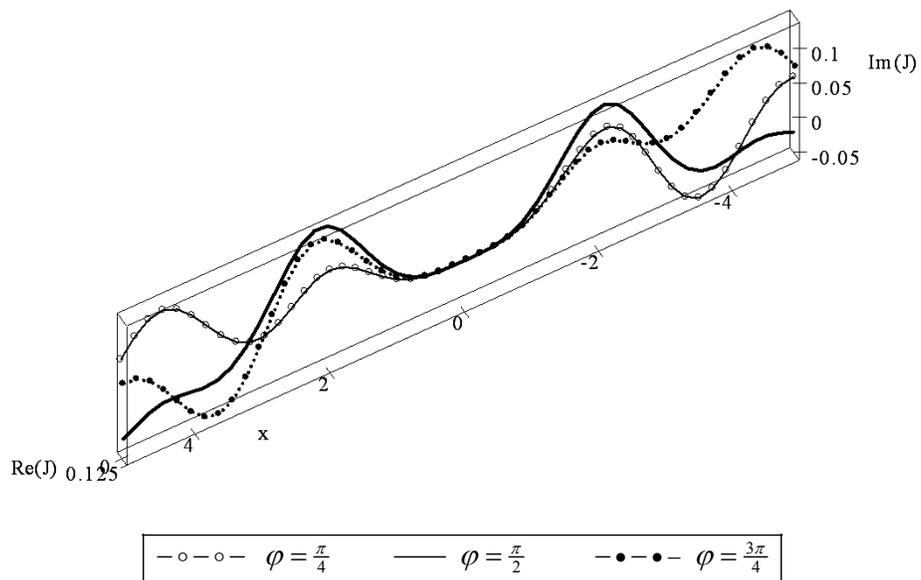


Figura 5. $J_{2,-1}(x; \tau)$ para diferentes valores de ϕ **Figura 6.** $J_{2,-1}(x; \tau)$ para diferentes valores de ϕ 

Referencias bibliográficas

1. Lebedev, N. N., *Special Functions and Their Applications*, Dover Publications Inc., New York, (1972).
2. Galué, L., Khajah, H. G. and Kalla, S.L., Multiplication theorems for generalized and double - index Bessel functions, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 118, Nos. 1-2, (2000), 143-150.
3. Dattoli, G., Migliorati, M. and Srivastava, H. M., Bessel summation formulae and operational methods, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 173, No. 1, (2005), 149-154.
4. Galué, L., A generalized Bessel function. *Integral Transforms and Special Functions*, Vol. 14, No. 5, (2003), 395-401.
5. Galué, L., Evaluation of some integrals involving generalized Bessel functions, *Integral Transforms and Special Functions*, Vol. 12, No. 3, (2001), 251-256.
6. Pathan, M. A., Goyal, A. N. and Shahwan, M. J. S., Lie- theoretic generating functions of multivariable generalized Bessel functions, *Reports on Mathematical physics*, Vol. 39, No. 2, (1997), 249-254.
7. Dattoli, G., Torre, A. and Carpanese, M., The Hermite -- Bessel functions: a new point of view on the theory of the generalized Bessel functions, *Radiation Physics and Chemistry*, Vol. 51, No. 3, (1998), 221-228.
8. Dattoli, G., Chiccoli, C., Lorenzutta, S., Maino, G., Richetta, M. and Torre, A., Advances on the theory of generalized Bessel function and applications to multiphoton processes, *Journal of Scientific Computing*, Vol. 8, No. 1, (1993), 69-109.
9. Dattoli, G., Giannessi, L., Mezi, L. and Torre, A., Theory of generalized Bessel functions, *Journal II Nuovo Cimento*, Vol. 105, No. 3, (1990), 327-348.
10. Castillo, G. y Galué, L., Teoremas para funciones de Bessel de dos índices y un parámetro, *Revista Colombiana de Matemáticas*, Vol. 44, No. 1 (2010), 65-78.
11. Galué, L. y Castillo, G., Algunos resultados sobre las funciones de Bessel de dos índices y un parámetro, *Revista Tecnocientífica URU*, Vol. 1, No. 1, (2011), 59-71.
12. Reiss, H. R. and Krainov, V. P., Generalized Bessel functions in tunneling ionization, *Journal of Physics Mathematical and General*, Vol. 36, No. 20, (2003), 5575-5585.
13. Galué, L., Kapteyn series for generalized Bessel functions, *International Journal of Applied Mathematics*, Vol. 7, No. 2, (2001), 159-167.
14. Dattoli, G., Chiccoli, C., Lorenzutta, S., Maino, G., Richetta, M. and Torre, A., Advances on the theory of generalized Bessel function and applications to multiphoton processes. *Journal of Scientific Computing*, Vol. 8, No. 1,(1993), 69-109.
15. Dattoli, G., Giannessi, L., Mezi, L. and Torre, A., Theory of generalized Bessel functions. *Journal II Nuovo Cimento*, Vol.105, No. 3,(1990), 327-348.
16. Dattoli, G., Chiccoli, C., Lorenzutta, S., Maino, G. and Torre, A., Generalized Bessel functions of the Anger type and applications to physical problems, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol. 184, No. 2, (1994), 201-221.
17. Paciorek, W. A. and Chapuis, G., Generalized Bessel functions in incommensurate structure analysis, *Foundations of Crystallography*, Vol. 50, No. 2, (1994), 194-203.

-
18. Dattoli, G., Lorenzutta, S., Maino, G., Torre, A., Voykov, G. and Chiccoli, C., Theory of two-index Bessel functions and applications to physical problems. *Journal of Mathematics and Physics*, Vol. 35, (1994), 3636-3649.
 19. Spiegel, M. R., *Análisis de Fourier*, McGraw-Hill, New York, (1976).
 20. Dattoli, G., Torre, A., Lorenzutta, S. and Maino, G., Generalized forms of Bessel functions and Hermite polynomials. *Annals of Numerical Mathematics*, Vol. 2, (1995), 211-232.