

Análisis numérico computacional de la distribución de temperaturas en una barra

Alfredo Villalobos¹ y Antonio Quintero²

¹Universidad del Zulia. Facultad de Ingeniería.
Centro de Investigación de Matemática Aplicada (CIMA).
Universidad Rafael Urdaneta. Facultad de Ingeniería. Maracaibo, Venezuela.
alfvill2903@gmail.com

²Universidad del Zulia. Facultad de Ingeniería.
Ciclo Básico. Departamento de Matemática. Maracaibo, Venezuela.
ajqg1605@hotmail.com

Recibido: 22/03/2013 Aceptado: 20/09/2013

Resumen

En este trabajo se determina la distribución de temperaturas en una barra, usando una transformada finita de Fourier. Una vez obtenida la solución analítica, se aplican técnicas numéricas computacionales para calcular valores de la temperatura para distintos valores de las variables y parámetros involucrados. Los resultados se presentan en forma de gráficas, lo cual permite una mejor comprensión del fenómeno físico.

Palabras clave: Distribución de temperaturas, transformada finita de Fourier, técnicas numéricas computacionales.

Computational numerical analysis for the temperatures distribution in a bar

Abstract

In this work, the temperature distribution in a bar is determined by using a finite Fourier transform. Once the analytical solution is obtained, computational numerical techniques are applied to calculate temperature values for different variables and involved parameters values. Results are shown in graphs which allow a better understanding of the physical phenomenon.

Key words: Temperature distribution, finite Fourier transforms, computational numerical techniques.

Introducción

En un trabajo anterior, Quintero y Villalobos [1] establecieron una forma general de la transformada finita de Fourier, en el marco de la teoría de las transformadas finitas de Sturm-Liouville [2]. A partir de dicha forma general, obtuvieron nueve tipos de transformadas finitas de Fourier, entre las cuales se incluyen las ampliamente conocidas transformadas finitas seno y coseno [2,3]. Además, usaron algunas de estas transformadas para resolver problemas de contorno.

En el presente trabajo se considera el problema de determinar la distribución de temperaturas $U(x,t)$ en una barra delgada, de longitud L y difusividad térmica k , dadas su temperatura inicial y las condiciones en sus extremos.

La solución analítica es obtenida utilizando una transformada finita de Fourier [1]. Sin embargo, el propósito del trabajo es aplicar técnicas numéricas computacionales que permiten, a partir de la expresión analítica, calcular los valores de la temperatura a lo largo de la barra y mostrar los resultados en forma de gráficas para distintos valores de las variables y parámetros involucrados.

Una transformada finita de Fourier

Quintero y Villalobos [1] definen, entre otras, la transformada finita de Fourier

$$F[f(x),n] = \bar{f}(n) = \int_0^L f(x) \operatorname{sen}(\lambda_n x) dx \quad (1)$$

donde $\lambda_n (n=1,2,\dots)$ son las raíces positivas de la ecuación

$$\tan(\lambda L) = -\frac{1}{h}. \quad (2)$$

La fórmula de inversión correspondiente viene dada por

$$F^{-1}[\bar{f}(n);x] = f(x) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{f}(n) \lambda_n \operatorname{sen}(\lambda_n x)}{2\lambda_n L - \operatorname{sen}(2\lambda_n L)} \quad (3)$$

donde la suma es tomada sobre todas las raíces positivas de la ecuación (2).

Además, se tiene que

$$F[f''(x),n] = -\lambda_n^2 \bar{f}(n) + \lambda_n f(0) + [f'(L) + hf(L)] \operatorname{sen}(\lambda_n L). \quad (4)$$

Modelo matemático y su solución analítica

Ecuación diferencial:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (0 < x < L, t > 0). \quad (5)$$

Condiciones de contorno:

$$U(0,t) = 0 \quad (6)$$

$$U_x(L,t) + hU(L,t) = 0 \quad (7)$$

donde h es el coeficiente de transmisión de calor entre la cara $x=L$ y el medio circundante a temperatura cero

Condición inicial:

$$U(x,0) = A \text{ (constante)} \quad (8)$$

La presencia de la derivada $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ en la ecuación diferencial (5) y la forma de las condiciones de contorno (6) y (7) sugieren que $U(x,t)$ puede obtenerse usando la transformada definida en (1) respecto a la variable x , esto es:

$$F[U(x,t), x \rightarrow n] = \bar{U}(n,t) = \int_0^L U(x,t) \text{sen}(\lambda_n x) dx. \quad (9)$$

Aplicando la transformada (9) en la ecuación diferencial (5), tenemos:

$$F\left[\frac{\partial U}{\partial t}, x \rightarrow n\right] = kF\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, x \rightarrow n\right]$$

$$\frac{\partial \bar{U}(n,t)}{\partial t} = k\{-\lambda_n^2 \bar{U}(n,t) + \lambda_n U(0,t) + [U_x(L,t) + hU(L,t)]\text{sen}(\lambda_n L)\}$$

y, de acuerdo con las condiciones de contorno (6) y (7), queda

$$\frac{\partial \bar{U}(n,t)}{\partial t} + k\lambda_n^2 \bar{U}(n,t) = 0 \quad (10)$$

cuya solución general viene dada por

$$\bar{U}(n,t) = Ce^{-k\lambda_n^2 t}. \quad (11)$$

Tomando $t=0$ en (11) y usando la condición inicial (8), tenemos

$$\bar{U}(n,0) = C = A \int_0^L \text{sen}(\lambda_n x) dx = \frac{A}{\lambda_n} [1 - \cos(\lambda_n L)] \quad (12)$$

y, de esta manera, se obtiene que

$$\bar{U}(n,t) = \frac{A}{\lambda_n} [1 - \cos(\lambda_n L)] e^{-k\lambda_n^2 t}. \quad (13)$$

Según (3)

$$U(x,t) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(n,t) \lambda_n \text{sen}(\lambda_n x)}{2\lambda_n L - \text{sen}(2\lambda_n L)}$$

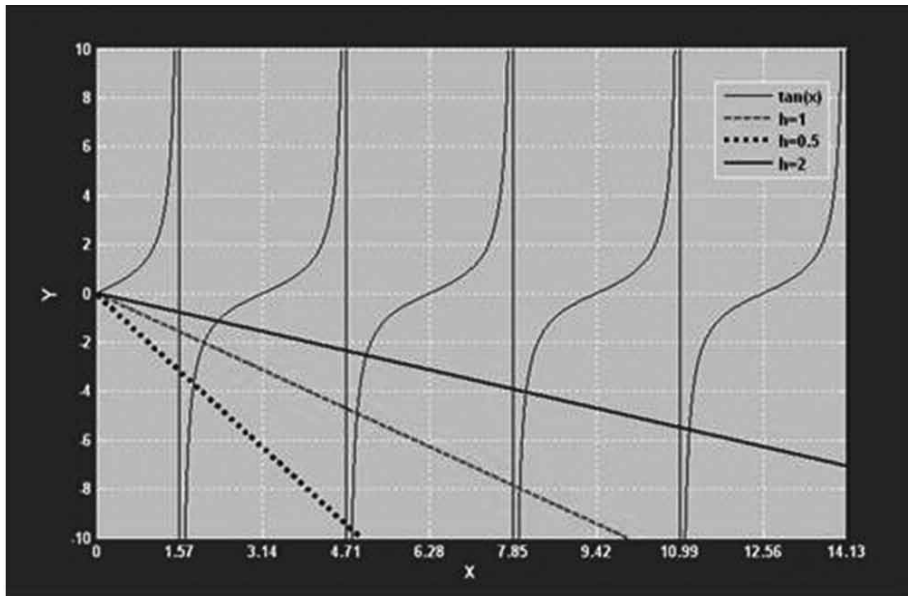
y, dado (13), resulta finalmente

$$U(x,t) = 4A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - \cos(\lambda_n L)] e^{-k\lambda_n^2 t} \text{sen}(\lambda_n x)}{2\lambda_n L - \text{sen}(2\lambda_n L)} \quad (14)$$

donde la suma es tomada sobre todas las raíces positivas de la ecuación (2).

Análisis numérico computacional de la solución analítica

Las raíces de la ecuación (2) se encuentran en las intersecciones de las funciones $y = \tan(Lx)$ y $y = -x/h$. La Figura 1 muestra estas funciones para $L=1$ y algunos valores de h .

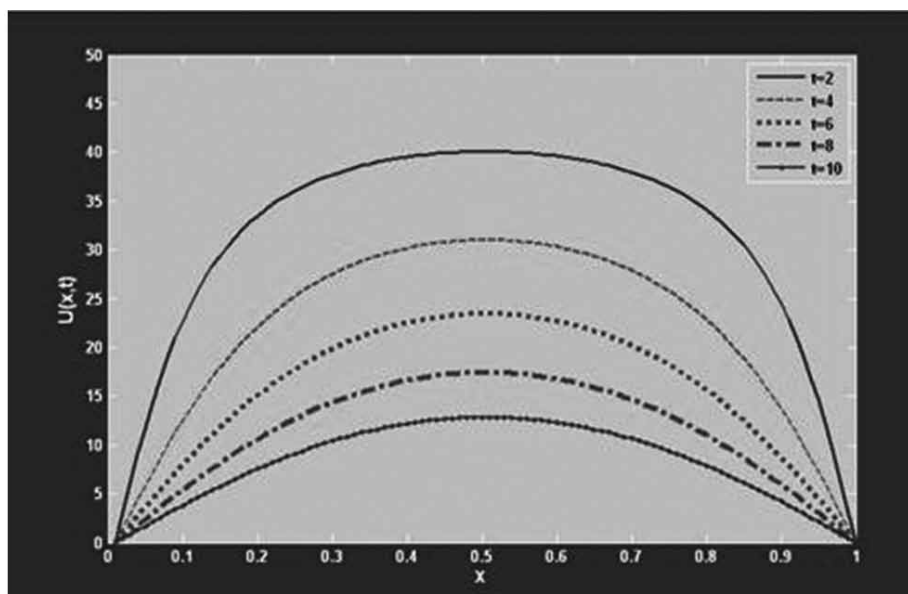
Figura 1. Intervalos para las raíces de $\tan(\lambda) = -\lambda/h$ 

Vemos que, independientemente del valor de $h > 0$, las raíces se encuentran en los intervalos $[(2n-1)\pi/2, (2n+1)\pi/2]$, $(n=1, 2, \dots)$.

Dado que el período de la función $y = \tan(Lx)$ es π/L , las raíces se encontrarán en los intervalos $[(2n-1)\pi/2L, (2n+1)\pi/2L]$, $(n=1, 2, \dots)$, para $L > 0$ cualquiera.

Con ayuda de un sistema algebraico de cómputo puede usarse el método de bisección [4] en cada uno de los intervalos y así obtener las raíces correspondientes. Con las raíces puede procederse a la aproximación numérica computacional de la solución (14) para valores seleccionados de A , k , h y L .

Para $A=50$, $k=0,05$, $h=100$ y $L=1$; se obtuvo la suma de la serie (14) con los primeros n términos, usando el criterio de truncamiento $|S_{n+1} - S_n| < 10^{-5}$. Los resultados se muestran en la Figura 2.

Figura 2. Solución para $A=50$, $k=0,05$, $h=100$ y $L=1$ 

Se aprecia como la distribución de temperaturas se desplaza uniformemente desde el valor dado por la condición inicial $U(x,0) = A$ hacia el cero de la condición de contorno homogénea en $x=0$. La uniformidad de este desplazamiento, reflejado en la simetría de las curvas, indica que la condición $U_x(L,t) + hU(L,t) = 0$, con $h=100$, se comporta como una condición $U(L,t) = 0$. El término $U_x(L,t)$ pierde relevancia ante el término $hU(L,t)$ para $h=100$. Más adelante se presentarán resultados para otros valores del parámetro h .

Manteniendo los valores usados para los demás parámetros, las Figuras 3 y 4 muestran los resultados para $k=0,03$ y $k=0,02$, respectivamente.

Figura 3. Solución para $A=50$, $k=0,03$, $h=100$ y $L=1$

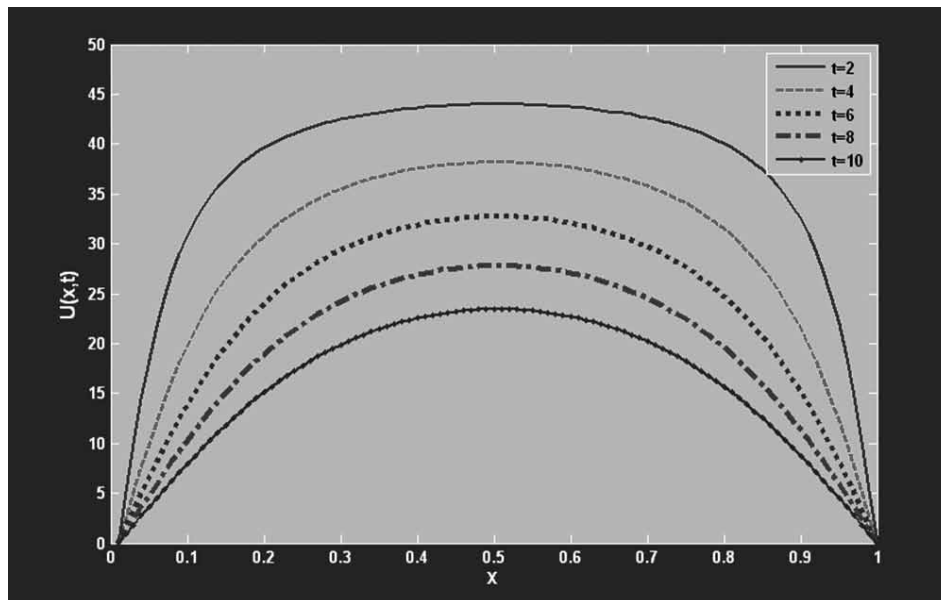
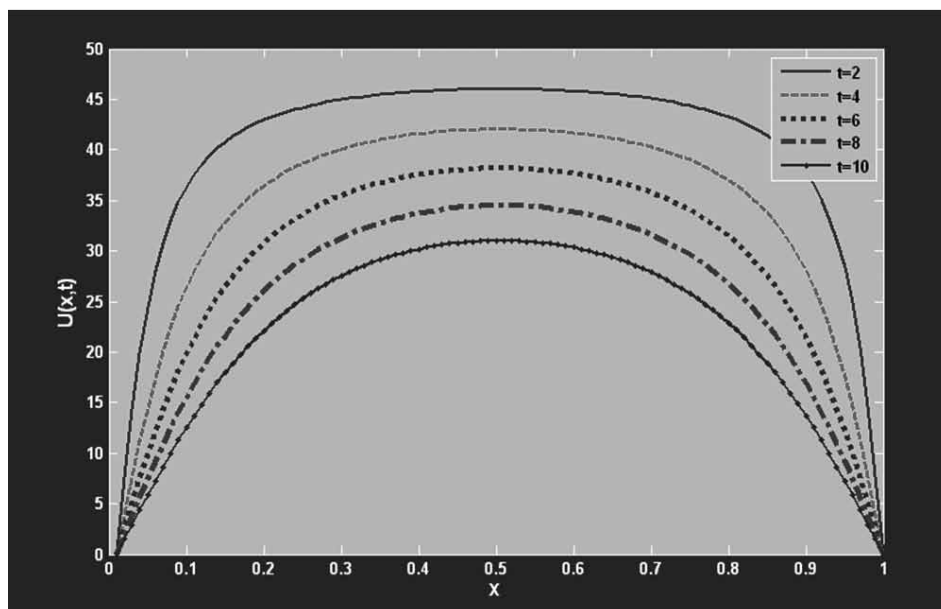


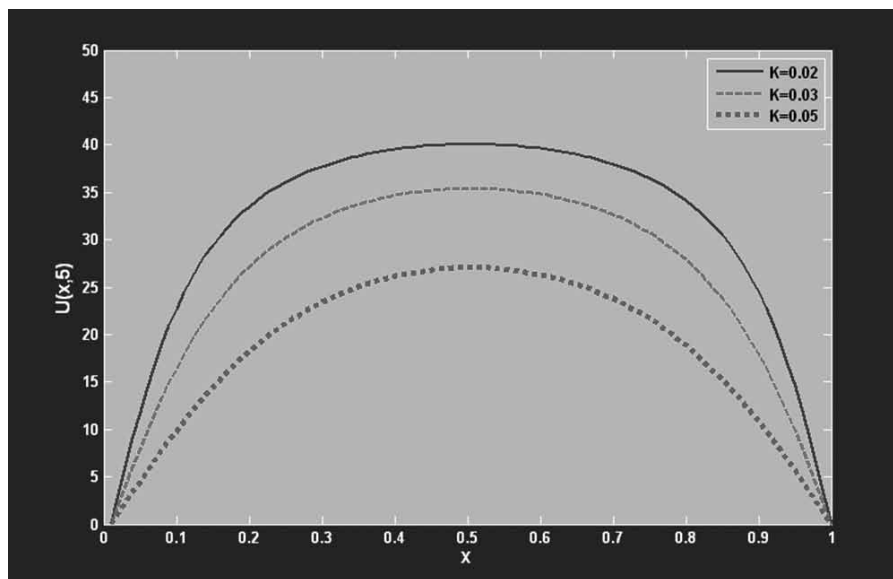
Figura 4. Solución para $A=50$, $k=0,02$, $h=100$ y $L=1$



Se observa en estas figuras el efecto del coeficiente de difusividad térmica, según el cual la temperatura disminuye más lento con el paso del tiempo a medida que se reduce el valor k .

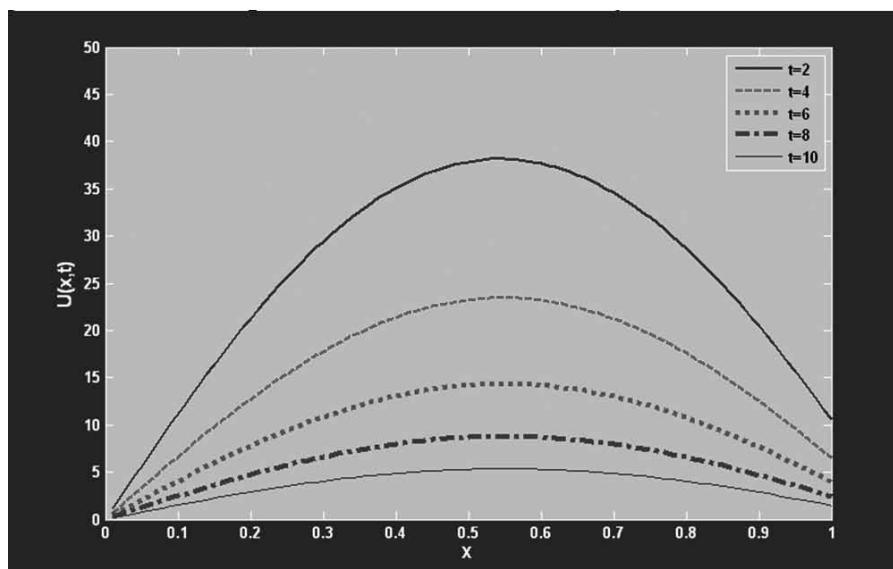
En tal sentido y con el fin de comparar en una sola gráfica el efecto de este parámetro, la siguiente figura muestra la solución (14) para el instante $t=5$ y los tres valores de k presentados en las gráficas anteriores.

Figura 5. Solución para $A=50$, $t=5$, $h=100$ y $L=1$



En lo que respecta al parámetro h , la Figura 6 muestra la solución (14) para $A=50$, $k=0,03$, $h=10$ y $L=1$.

Figura 6. Solución para $A=50$, $k=0,03$, $h=10$ y $L=1$

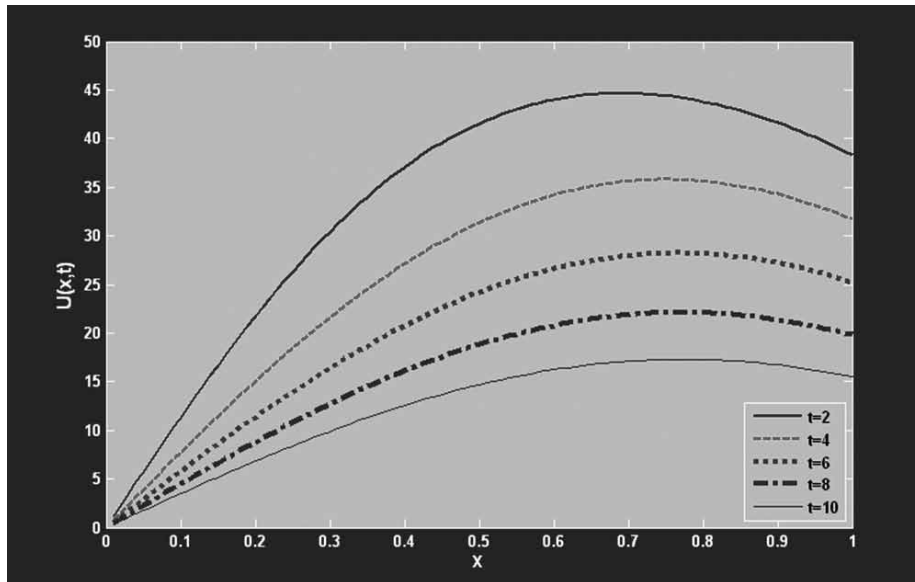


Se aprecia que al cambiar de $h=100$ (Figura 1) a $h=10$ (Figura 6), la distribución de temperaturas ya no es igual en ambos extremos de la barra. El desplazamiento de las curvas ya no es simétrico, resul-

tando más gradual en el extremo con la condición $U_x(L,t) + hU(L,t) = 0$, $h=10$, que en el extremo con la condición $U(0,t) = 0$.

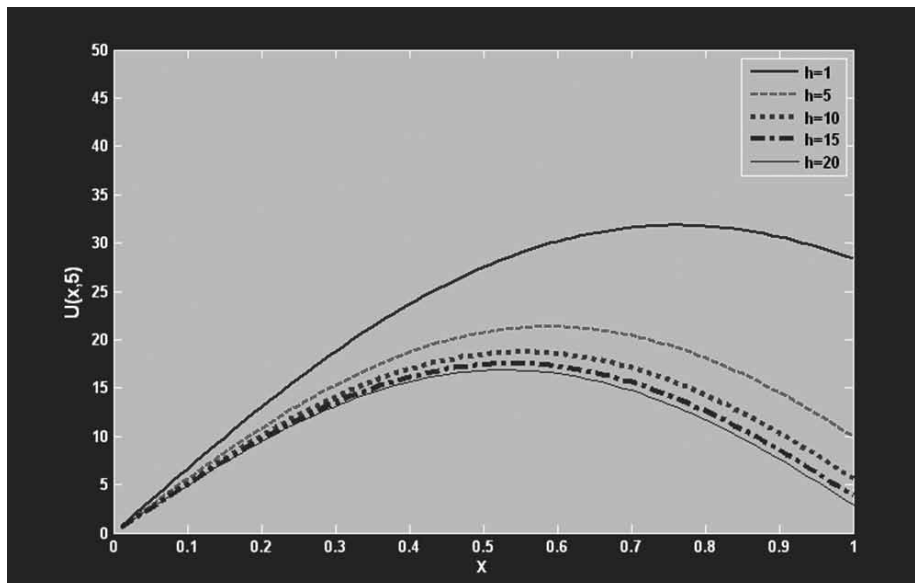
Buscando que este efecto sea más marcado, se utiliza $h=1$ y se presentan los resultados en la Figura 7.

Figura 7. Solución para $A=50$, $k=0,03$, $h=1$ y $L=1$



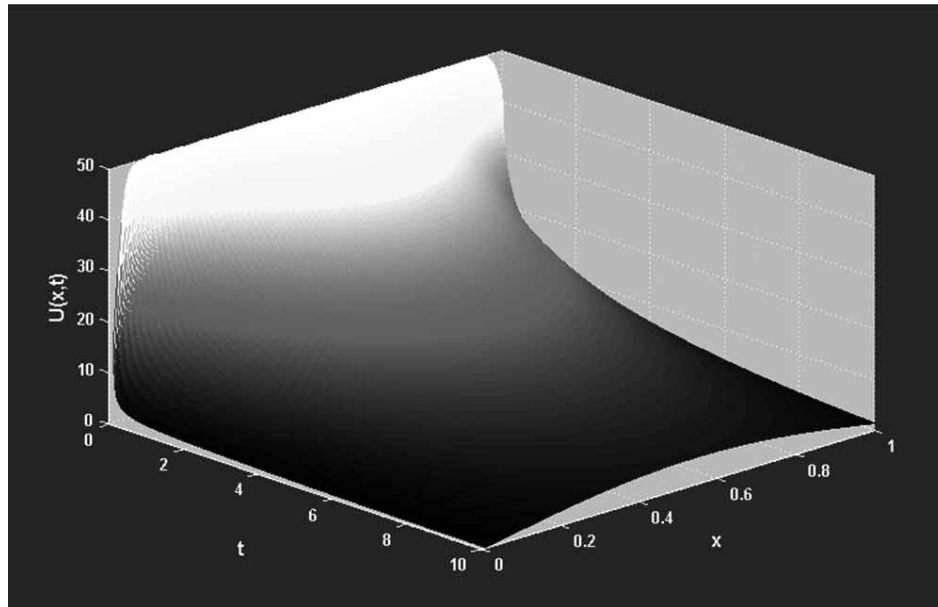
Así como la disminución del coeficiente de difusividad térmica k hace más lento el cambio de temperatura a lo largo de la barra (Figura 5), la disminución del coeficiente de transferencia de calor h hace más lento el cambio de temperatura, pero a nivel del extremo correspondiente, en este caso, $x=1$. Este efecto puede verificarse en la siguiente figura donde, para el instante $t=5$, se utilizan varios valores de h .

Figura 8. Solución para $A=50$, $k=0,03$, $t=5$ y $L=1$



Finalmente, se presenta el resultado numérico computacional de la solución analítica (14) en forma de superficie $U(x, t)$ para la siguiente selección de parámetros: $A=50$, $k=0,03$, $h=10$ y $L=1$.

Figura 9. Solución para $A=50$, $k=0,03$, $h=10$ y $L=1$



Referencias bibliográficas

1. Quintero, A. J. Forma general de la transformada finita de Fourier y sus aplicaciones a problemas de contorno. Tesis de Maestría en Matemática Aplicada, Universidad del Zulia, Facultad de Ingeniería, División de Estudios para Graduados, Maracaibo - Venezuela, (2002). (Tutor: Alfredo Villalobos).
2. Sneddon, I. N. The use of integral transforms. McGraw - Hill Publishing Company, New Delhi, (1974).
3. Tranter, C. I. Integral transforms in mathematical physics. Chapman and Hall, London, (1971).
4. Chapra, S. C. y Canale, R. P. Métodos numéricos para ingenieros. McGraw - Hill Interamericana, México, (1999).