Revista Tecnocientífica URU
Universidad Rafael Urdaneta
Facultad de Ingeniería
Nº 6 Enero - Junio 2014
Depósito legal: ppi 201402ZU4464
ISSN: 2343 - 6360

Alguna propiedades de las N-normas (II)

José A. Sarabia R.

En homenaje al Dr. Shyam Kalla

Departamento de Estudios Generales y Básicos, Sección de Matemática
UNEXPO-Barquisimeto
Avenida Corpahuaico, Barquisimeto, 3002, Venezuela
jsarabia196@gmail.com

Recibido: 23-09-2013 Aceptado: 19-03-2014

Resumen

En el presente trabajo se estudia la posibilidad de solucionar la ecuación funcional de Frank con pares (U,V), donde U es una u-norma y V es una n-norma. También se desarrolla el concepto de a-norma en relación a la ecuación funcional anterior, así como la construcción de operadores TR a partir de n-normas y n-normas k-Lipschitcianas. Finalmente se hacen algunas consideraciones sobre n-normas isomorfas.

Palabras clave: N-norma, a-norma, transformación de relevancia (TR), función k-Lipschitz, n-norma isomorfa.

Some properties of N-norms (II)

Abstract

In this paper we study the possibility of solving the Frank functional equation with pairs (U,V) , where U is an u-norm and V is a n-norm. We also developed the concept of a-norm related with the above functional equation, as well as building up operators RT from n-norms and n-norms k-Lipschitcianas. Finally, some considerations on isomorphic n-norms are made.

Key words: N -norm, a-norm, RT-Transformation, k-Lipschitz functions, isomorphic n-norms.

Introducción

El concepto de n-norma, norma nula o "null norm" es una variante de los conceptos de t-norma, s-norma(t-conorma) y u-norma(uninorma), el cual fue propuesto por T. Calvo en [3]. Su importancia comienza a aumentar, tanto en el campo de las Funciones Asociativas, como en sus aplicaciones, sobre todo en los Sistemas Expertos, Cuantificadores Borrosos, etc. (Vea: [4], [8] y [9]). Inclusive ya se está trabajando en las denominadas n-normas no conmutativas (Vea: [2]). En el presente trabajo se repasan algunos conceptos y ejemplos del trabajo anterior (Vea [13]), con el objeto de establecer la debida conexión entre ellos. Luego se procede a estudiar la posibilidad que existan pares (U,V), donde U es una u – norma y V es una n – norma, tal que solucionen la ecuación de Frank. Como veremos tal cosa no es posible, y por eso cambiamos la n-norma, por una operación binaria más débil, como son las a-normas. Viendo que en este caso, si hay solución a la ecuación funcional. Posteriormente, estudiamos la construcción de operadores

TR, a partir de n-normas, tal como se había hecho en trabajos anteriores, con las t-normas, s-normas y u-normas. Después hablamos de n-normas Lipschitcianas y finalmente, se construyen n-normas isomorfas a una dada.

En este trabajo no incluimos las posibles aproximaciones de Shepard, tal como se hizo en [12], ni estudios de distributividad de n-normas con otras operaciones binarias, y tampoco de las posibles construcciones de implicaciones o co-implicaciones con n-normas, siendo esto, material para un futuro trabajo.

Finalmente, quiero resaltar que este trabajo está especialmente dedicado al **Dr. Shyam Kalla**, eminente matemático, nacido en la India, de magnífica trayectoria en su país, Argentina, y sobre todo en Venezuela, Universidad del Zulia, Kuwait, etc. En todos ellos hizo una gran labor a nivel de post-grado, guiando numerosas tesis de grado a nivel de maestría y doctorado. Y quien, en mi, produjo una gran influencia hacia los diferentes campos de la Matemática Aplicable. ¡Honor a su gran labor!

Preliminares

Daremos algunas definiciones importantes en el desarrollo del tema.

Definición 2.1

Una **t-norma** ***T*** es una operación sobre $I = [0, 1]$, tal que cumple los siguientes axiomas:

(t.1) $T(x, y) = T(y, x)\ \forall x, y \in I$. (Conmutatividad)

(t.2) $T(T(x, y), z) = T\big(x, T(y, z)\big)\ \forall x, y, z \in I$. (Asociatividad)

(t.3) $x \leq y \implies T(x, z) \leq T(y, z)\ \forall x, y, z \in I$. (Monotonía creciente)

(t.4) $T(x, 1) = x\ \forall x \in I$. (Existencia del elemento neutro)

Definición 2.2

Una **s-norma** o **t-conorma** ***S*** es una operación sobre $I = [0, 1]$, tal que cumple los siguientes axiomas:

(s.1) $S(x, y) = S(y, x)\ \forall x, y \in I$. (Conmutatividad)

(s.2) $S(S(x, y), z) = S\big(x, S(y, z)\big)\ \forall x, y, z \in I$. (Asociatividad)

(s.3) $x \leq y \implies S(x, z) \leq S(y, z)\ \forall x, y, z \in I$. (Monotonía creciente)

(s.4) $S(x, 0) = x\ \forall x \in I$. (Existencia del elemento neutro)

Definición 2.3

Una **u-norma** o **uninorma** *U* es una operación sobre $I = [0, 1]$, tal que cumple los siguientes axiomas:

(u.1) $U(x, y) = U(y, x)\ \forall x, y \in I$. (Conmutatividad)

(u.2) $U(U(x, y), z) = U\big(x, U(y, z)\big)\ \forall x, y, z \in I$. (Asociatividad)

(u.3) $x \leq y \implies U(x, z) \leq U(y, z)\ \forall x, y, z \in I$. (Monotonía creciente)

(u.4) Existe $e \in I$ tal que: $U(x, e) = x\ \forall x \in I$. (Existencia del elemento neutro).

Como vemos, los tres primeros axiomas de cada una, coinciden. Asimismo cuando $e = 0$, tenemos que una u-norma es s-norma, mientras que si $e = 1$, la u-norma es t-norma.

Para un estudio bastante completo de estas operaciones ver: [1], [2], [5], [6], [11] y [12].

Definición 2.4

Una **n-norma** o **norma nula** V es una operación sobre $I = [0, 1]$, tal que cumple los siguientes axiomas:

(n.1) $V(x, y) = V(y, x)\ \forall x, y \in I$. (Conmutatividad)

(n.2) $V(V(x, y), z) = V\big(x, V(y, z)\big)\ \forall x, y, z \in I$. (Asociatividad)

(n.3) $x \leq y \Longrightarrow V(x, z) \leq V(y, z)\ \forall x, y, z \in I$. (Monotonía creciente)

(n.4) Existe $a \in (0,1)$ tal que $V(x, 0) = x\ \forall x \in [0, a]$ y $V(x, 1) = x\ \forall x \in [a, 1]$.

Algunas Propiedades de la n-norma

Para la demostración de las siguientes propiedades de la n-norma, vea [13].

a) $V(x, a) = V(a, x) = a\ \forall x \in I$. O sea a es el **elemento absorbente o aniquilador** de V.

Además, tenemos que: $V(x, y) = a, \forall (x, y) \in ([0, a] \times [a, 1]) \cup ([a, 1] \times [0, a]) = \Re_a$.

b) Si V es una n-norma entonces:

$$T_V(x, y) = \frac{1}{1-a}\left(V(a + (1-a)x\,, a + (1-a)y) - a\right) \quad (3.1)$$

es una t-norma que recibe el nombre de **t-norma asociada a la n-norma V**.

Asimismo:

$$S_V(x, y) = \frac{1}{a} V(ax, ay) \quad (3.2)$$

es una s-norma que recibe el nombre de **s-norma asociada a la n-norma V**.

c) Para una n-norma V de elemento absorbente $a \in (0, 1)$, tenemos que:

$$V(x, y) \begin{cases} \geq \max\{x, y\} \text{ si } (x, y) \in [0, a]^2 \\ \leq \min\{x, y\} \text{ si } (x, y) \in [a, 1]^2 \\ = a \text{ si } (x, y) \in \Re_a \end{cases}$$

Donde: $\Re_a = ([0, a] \times [a, 1]) \cup ([a, 1] \times [0, a])$.

d) Sea V una operación binaria sobre I: conmutativa, asociativa, monótona creciente y cumpliendo la propiedad de valor intermedio en cada componente. Entonces: $V(0, 0) = 0$ y $V(1, 1) = 1$ si y solo si V es t-norma, s-norma, ó n-norma.

e) A partir de una t-norma T y de una s-norma S se puede construir una n-norma V, para cada $a \in I$. En efecto:

Sea T una t-norma, S una s-norma y $a \in (0, 1)$. Entonces existe una única n-norma $V = V_{T,S,a}$ tal que: $T_V = T$, $S_V = \mathrm{T}$ y $V(x, a) = a\ \forall x \in I$. Siendo ésta:

$$V_{T,S,a} = \begin{cases} aS\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right) & (x, y) \in [0, a]^2 \\ a + (1-a)T\left(\frac{x-a}{1-a}, \frac{y-a}{1-a}\right) & (x, y) \in [a, 1]^2 \\ a & e.o.c \end{cases} \quad (3.3)$$

Ejemplos de n-normas

Los siguientes ejemplos son construidos usando la propiedad (e). Para mayores detalles y gráficas, vea [13].

1) Sean: $T_P(x,y) = xy$ la t-norma producto y $S_P(x,y) = x + y - xy$ la s-norma producto, y sea $a \in (0,1)$. Entonces la n-norma definida a partir de ellas, recibe el nombre de **n-norma producto**, y viene dada así:

$$V_{P,a} = \begin{cases} x + y - \dfrac{xy}{a} \; (x,y) \in [0,a]^2 \\ a + \dfrac{(x-a)(y-a)}{1-a} \; (x,y) \in [a,1]^2 \\ a \; (x,y) \in \Re_a \end{cases}$$

2) La siguiente n-norma está construida con un par (T, S), donde ellas no son duales. Así, tomamos: $T_P(x,y) = xy$ (t-norma producto), $S_M(x,y) = \max\{x,y\}$ (s-norma máxima), y $a \in (0,1)$. Entonces la n-norma construida usando la propiedad (e), es:

$$V_{P,M,a} = \begin{cases} \max\{x,y\} \; (x,y) \in [0,a]^2 \\ a + \dfrac{(x-a)(y-a)}{a} \; (x,y) \in [a,1]^2 \\ a \; (x,y) \in \Re_a \end{cases}$$

Este ejemplo sirve para observar que dada una n-norma V, no siempre T_V y S_V son duales.

3) Sean: $T_L(x,y) = \max\{x + y - 1, 0\}$ (t-norma de Lukasiewicz), $S_L(x,y) = \min\{x + y, 1\}$ (s-norma de Lukasiewicz) y $a \in (0,1)$. Con ellas definimos la **n-norma de Lukasiewicz,** la cual queda en la forma: (Vea fig.3, con $a = 0.3$ y fig.4, con $a = 0.5$ en [13]).

$$V_{L,a}(x,y) = \begin{cases} x + y \text{ si: } x + y \le a \wedge (x,y) \in [0,a]^2 \\ x + y - 1 \text{ si: } x + y - 1 \ge a \wedge (x,y) \in [a,1]^2 \\ a \; e.o.c \end{cases}$$

4) Sean: T_D la t-norma drástica y $S_M(x,y) = \max\{x,y\}$, la s-norma máxima. Donde:

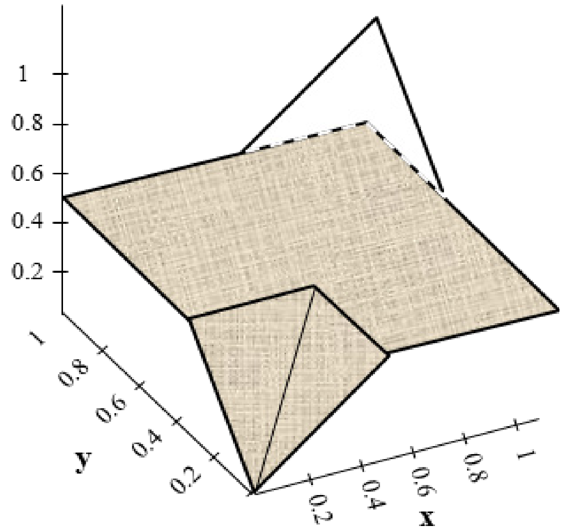
$$T_D(x,y) = \begin{cases} 0 \; (x,y) \in [0,1)^2 \\ \min\{x,y\} \; e.o.c \end{cases}$$

Entonces la n-norma que ellas definen para $a \in (0,1)$, es:

$$V_{D,M,a}(x,y) = \begin{cases} \max\{x,y\} \text{ si: } (x,y) \in [0,a]^2 \\ \min\{x,y\} \text{ si: } (x = 1 \wedge y \ge a) \vee (y = 1 \wedge x \ge a) \\ a \; e.o.c \end{cases}$$

En la sección 5, veremos que si V es una n-norma cualquiera de elemento absorbente a, entonces: $V_{D,M,a}(x,y) \le V(x,y) \; \forall (x,y) \in I^2$. Por esta razón a $V_{D,M,a}$ se le llama la **n-norma más débil** de la familia de las n-normas de elemento absorbente a. (Vea la fig. 1, donde $a = 0.5$).

Figura 1



5) Similarmente, si tomamos T_M y S_D. Donde: $T_M(x,y) = \min\{x,y\}$ (t-norma máxima) y

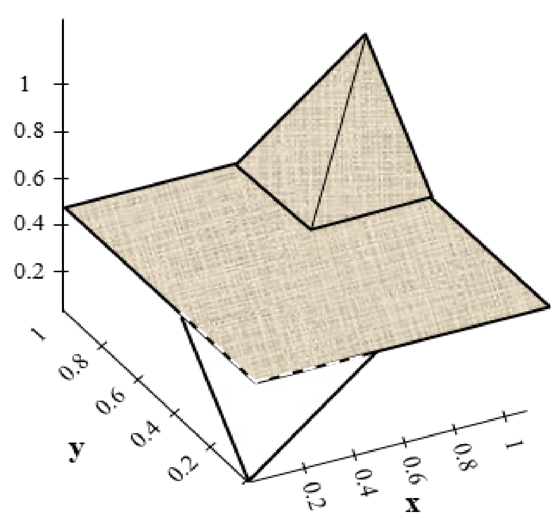
$$S_D(x,y) = \begin{cases} \max\{x,y\} \text{ si: } x.y = 0 \\ 1 \text{ si: } x.y \neq 0 \end{cases} \text{ (s-norma drástica).}$$

Entonces, la n-norma que definen: $V_{M,D,a}$, viene dada así

$$V_{M,D,a}(x,y) = \begin{cases} \min\{x,y\} \text{ si: } (x,y) \in [a,1]^2 \\ \max\{x,y\} \quad \text{si: } \big((x \leq a) \wedge (y=0)\big) \vee \big((y \leq a) \wedge (x=0)\big) \\ a \; e.o.c \end{cases}$$

En la sección 5, demostraremos que si V es una norma de elemento absorbente a, entonces: $V(x,y) \leq V_{M,D,a}(x,y)$, $\forall (x,y) \in I^2$. Por esta razón a esta n-norma se le conoce con el nombre de la **n-norma más fuerte** (Vea la fig. 2, también con $a = 0.5$)

Figura 2

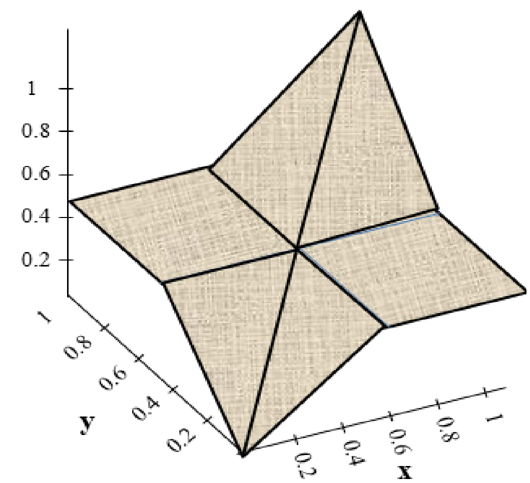


6) Sean ahora: $T_M(x,y) = \min\{x,y\}$, $S_M(x,y) = \max\{x,y\}$ y $a \in (0,1)$. La n-norma que se obtiene de ellos es:

$$V_{min,max,a}(x,y) = \begin{cases} \max\{x,y\} & (x,y) \in [0,a]^2 \\ \min\{x,y\} & (x,y) \in [a,1]^2 \\ a & e.o.c \end{cases}$$

Esta n-norma tiene particular importancia, por ser la única n-norma idempotente con elemento absorbente $a \in (0,1)$ (Vea la fig. 3, donde $a = 0{,}5$).

Figura 3



Otras propiedades de la n-norma

A) Comparación de n-normas de elemento absorbente ***a***

Teorema 5.1

Sea V una n-norma con elemento absorbente $a \in (0,1)$. Entonces:

$$V_{D,M,a}(x,y) \leq V(x,y) \leq V_{M,D,a}(x,y)\ \forall (x,y) \in I^2$$

Demostración:

Vea teorema 3.2 en [13].

B) Dualidad de las n-normas

Definición 5.1

Sea N una función de I en I. Diremos que N es una **negación fuerte** si cumple lo siguiente:

(N.1) $\forall a, b \in I$ con $a < b$, entonces: $N(a) > N(b)$ (Estrictamente decreciente).

(N.2) $\forall a \in I$ se cumple: $N(N(a)) = a$ (Involución).

Algunos ejemplos de negación fuerte son:

1) $N(x) = 1 - x$ (Negación estándar.

2) $N_{S,\beta}(x) = \dfrac{1-x}{1+\beta x}$ $(\beta \neq 0, \beta > -1)$ (Negación de Sugeno de parámetro β)

Entre otras propiedades de la negación fuerte tenemos las siguientes:

a) $N(0) = 1; N(1) = 0$

b) N es biyectiva y continua sobre I.

c) Existe un único punto fijo para N. Por ejemplo para la negación de Sugeno de parámetro β, el punto fijo es: $\bar{a} = \dfrac{\sqrt{1+\beta}-1}{\beta}$.

Teorema 5.2

Sea V una n-norma con elemento absorbente a, y sea N una negación fuerte. Entonces:

$W(x, y) = N\left(V\left(N(x), N(y)\right)\right)$ (5.1), es una n-norma de elemento absorbente $N(a)$.

Demostración:

Vea teorema 3.3 en [13].

Definición 5.2

A la n-norma $W(x, y) = N\left(V\left(N(x), N(y)\right)\right)$ (5.1), se le llama **n-norma dual de** V, y se le denota $W_{V,N}$.

Nota: si $V = W_{V,N}$, es decir si V es auto-dual con respecto a N, entonces: $N(a) = a$. De manera que N debe tener al elemento absorbente a como punto fijo. Luego si: $N(a) \neq a$, entonces V no puede ser auto-dual con respecto a N.

En el teorema siguiente se da un procedimiento para construir una n-norma V que sea auto-dual con respecto a una negación fuerte N. En [7], se menciona un resultado para t-normas que puede ser usado en el mencionado teorema.

Teorema 5.3

Dadas: la t-norma T, la s-norma S y $a \in (0, 1)$, entonces: $V = V_{T,S,a}$ es n- norma auto-dual respecto a la negación fuerte N, si y solo si:

a) $N(a) = a;$ b) $S(x, y) = \bar{N}^{-1}\left(T\left(\bar{N}(x), \bar{N}(y)\right)\right)\ \forall x, y \in I.$

Donde: $\bar{N}(\mathrm{t}) = \dfrac{N(a\mathrm{t}) - a}{1-a}\ \forall t \in I.$

Demostración:

Vea teorema 3.4 en [13].

C) Continuidad de las n-normas

La continuidad de una n-norma V está íntimamente ligada a la continuidad de T_V y S_V. En efecto veamos los siguientes resultados (Vea teoremas: 3.5 y 3.6, respectivamente, en [13]).

Teorema 5.4

Sean: T una t-norma continua en I^2, S una s-norma continua en I^2, y $a \in (0, 1)$. Entonces: $V_{T,S,a}$ es una n-norma continua en I^2. Recíprocamente, si V es una n-norma continua en I^2, entonces: T_V y S_V, son continuas en I^2.

Teorema 5.5

Sean: T una t-norma y S una s-norma, ambas continuas en I^2. Sea $\langle a_n \rangle$ una sucesión en (0, 1) tal que $a_n \uparrow (\downarrow)\, a \in (0, 1)$. Entonces existe

$$\lim_{n\to\infty} V_{T,S,a_n}(x,y) = V(x,y) \text{ y } V(x,y) = V_{T,S,a}\ ;\ \forall (x,y) \in I^2.$$

Luego V es una n-norma de elemento absorbente a.

Teorema 5.6

Sea $\langle V_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de n-normas con elemento absorbente $a_n \in (0, 1)$ tal que: $a_n \to a \in (0, 1)$ y tal que: $\lim_{n\to\infty} V_n(x,y) = V(x,y)\ \forall (x,y) \in I^2$. Entonces: V es una n-norma de elemento absorbente a.

Demostración:

Por propiedades de límite, es sencillo demostrar que V es una n-norma. Probemos entonces que a es el elemento absorbente de V.

Sea $x \in (0, a)$, luego: $(x, 0) \in [0, a)^2$, y como: $a_n \to a$, entonces: existe $m \in N$, tal que: $\forall n \geq m$, se cumple que: $x \leq a_n$. Luego:

$$V(x,0) = \lim_{n\to\infty} V_n(x,0) = \lim_{n\to\infty} a_n S_n\left(\frac{x}{a_n}, 0\right) = x.$$

Asimismo:

$$V(a,0) = \lim_{n\to\infty} V_n(a,0) = \lim_{n\to\infty} a_n S_n\left(\frac{a}{a_n}, 0\right) = a.$$

Luego: $V(x,0) = x\ \forall x \in [0, a]$.

Sea $x \in (a, 1]$, entonces existe $m \in N$, tal que: $\forall n \geq m$, se cumple que: $x \geq a_n$, o sea: $(x, 1) \in [a_n, 1]^2$, y por lo tanto:

$$V(x,1) = \lim_{n\to\infty} V_n(x,1) = \lim_{n\to\infty}\left(a_n + (1-a_n) T_n\left(\frac{x-a_n}{1-a_n}, 1\right)\right) = x.$$

Luego: $V(x, 1) = x\ \forall x \in [a, 1]$. Por lo tanto: a es el elemento absorbente de V.

D) La ecuación funcional de Frank y las n-normas

Definición 5.3

Diremos que U y V, funciones de I^2 en I, satisfacen la **ecuación funcional de Frank** en I^2, si se cumple que: $U(x,y) + V(x,y) = x + y\ \forall x,y \in I$ (5.2)

En el teorema 5.14 en [5, p.p. 131-132], se demuestra que la t-norma de Frank $T_{F,s}$ y su s-norma dual $S_{F,s}$, satisfacen (4.1). Así, para: $s > 0$ y $s \neq 1$, tenemos:

$$T_{F,s}(x,y) = \mathrm{Log}_s\left(1 + \frac{(s^x - 1)(s^y - 1)}{s - 1}\right) \quad (5.3)$$

$$S_{F,s}(x,y) = 1 - \mathrm{Log}_s\left(1 + \frac{(s^{1-x} - 1)(s^{1-y} - 1)}{s - 1}\right) \quad (5.4)$$

Siguiendo el resultado anterior, pudiera pensarse que hay algún par (U,V), que satisface (5.2), siendo U una cierta u-norma y V, una n-norma. Sin embargo, veremos que tal par no existe.

Teorema 5.7

Sea U una u-norma con elemento neutro $e \in (0,1)$, y sea V un operador binario creciente en la primera variable, tales que (U,V) satisfacen (5.2) en I^2, entonces V es conmutativo, creciente en cada variable, y e es elemento absorbente de V.

Demostración:

Como (U,V) satisfacen (5.2) en I^2, entonces:

$$V(x,y) = x + y - U(x,y) = y + x - U(y,x) = V(y,x)\ \forall x,y \in I$$

Luego, por la conmutatividad, V es creciente en cada componente.

Además: $V(x,e) = x + e - U(x,e) = x + e - x = e, \forall x \in I.$

Teorema 5.8

a) Sea U una u-norma con elemento neutro $e \in (0, 1)$, entonces no existe una n-norma V tal que el par (U,V) satisfaga (5.2).

b) Sea V una n-norma con elemento absorbente $a \in (0, 1)$, entonces no existe una u-norma U tal que el par (U,V) satisfaga (5.2).

Demostración:

a) Supongamos que existe una n-norma V tal que el par (U,V) satisfaga a (5.2). Por el teorema anterior, e es el elemento absorbente de V, luego: $V(0, e) = e \leq V(0, 1) \leq V(e, 1) = e$, o sea: $V(0, 1) = e$. Pero, entonces: $U(0, 1) = 0 + 1 - V(0, 1) = 1 - e \in (0, 1)$.

Lo que es una contradicción, pues: $U(0, 1) \in \{0, 1\}$, por ser u-norma.

b) Supongamos de nuevo que existe un par (U,V) que satisfaga (5.2), siendo V, una n-norma. Luego: $V(0, 1) = a$, y entonces: $U(0, 1) = 1 - a \in (0, 1)$. Lo que, de nuevo es imposible.

Veremos que si cambiamos la n-norma V, por una operación binaria con menos propiedades, si es posible que haya pares (U,V), donde U es una u-norma, tales que satisfagan (5.2). Por esta razón damos el concepto de a-norma o norma absorbente.

Definición 5.4

Una **a-norma o norma absorbente** A es una función de I^2 en I, tal que:

(a.1) $A(x,y) = A(y,x)\ \forall x,y \in I$. (Conmutativa) (a.2) $A(A(x,y),z) = A(x,A(y,z))\ \forall x,y,z \in I$. (Asociativa)

(a.3) Existe $a \in I$ tal que: $A(x,a) = a\ \forall x \in I$. (Existencia de elemento absorbente)

En [10] y [12] se dan algunas propiedades de la a-norma.

Es claro que las t-normas, s-normas y n-normas, son ejemplos de a-normas. Asimismo, si $a \in (0,1)$, una u-norma no puede ser a-norma. Algunos ejemplos de a-normas que no son de los tipos anteriores, son las siguientes: ($a \in (0, 1)$).

1) Definimos la denominada **a-norma más débil.**

$$A_{min}(x,y) = \begin{cases} \max\{x,y\} & (x,y) \in [0,a]^2 \\ 0 & (x,y) \in (a,1]^2 \\ \min\{x,y\} & e.o.c \end{cases}$$

2) La siguiente a-norma es la denominada **a-norma más fuerte**.

$$A_{max}(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in [0,a)^2 \\ \min\{x,y\} & (x,y) \in [a,1]^2 \\ \max\{x,y\} & e.o.c \end{cases}$$

Si A es una a-norma, se cumple que: $A_{min}(x,y) \leq A(x,y) \leq A_{max}(x,y), \forall x,y \in I$.

En el teorema 5 de [10], se hace la afirmación que si U es una u-norma con elemento neutro $e \in (0,1)$, entonces: $A(x,y) = x + y - U(x,y)$, es una a-norma, y por tanto el par (U, A) es una solución de (4.1). Sin embargo esto es **falso**. Veamos el siguiente contraejemplo.

Sea U la u-norma de Hamacher con $\lambda = 1$:

$$U(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{xy + (1-x)(1-y)} & \{x,y\} \neq \{0,1\} \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

Entonces $A(x,y)$ viene dada así:

$$A(x,y) = \begin{cases} x + y - \dfrac{xy}{xy + (1-x)(1-y)} & \{x,y\} \neq \{0,1\} \\ 1 & e.o.c \end{cases}$$

Pero A no es asociativa, por tanto no es a-norma. En efecto:

$$A\left(A\left(\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right),\frac{2}{3}\right) = \frac{1679}{3388} \neq A\left(\frac{1}{3},A\left(\frac{1}{4},\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{893}{1780}$$

Asimismo en [10], se prueba que los pares (U_d, A_{min}), y (U_c, A_{max}) son soluciones de (5.2).

E) Las n-normas y los operadores TR

Los operadores denominados TR o en inglés "RET"(transformaciones de relevancia) son de uso frecuente en la Lógica Borrosa Avanzada, siendo conocida la construcción de estos operadores a partir de t-normas, s-normas y u-normas. En este literal veremos la construcción de operadores TR a partir de n-normas.

Definición 5.5

Un operador binario h sobre I se denomina **transformación de relevancia o TR,** con respecto a $c \in I$, si satisface las siguientes condiciones:

(tr1) $h(0, y) = c$ y $h(1, y) = y \ \forall y \in I$.
(tr2) $\forall y_1, y_2 \in I$ tales que: $y_1 \leq y_2$ se cumple que: $h(x, y_1) \leq h(x, y_2) \ \forall x \in I$.
(tr3) $\forall y \in [c, 1]$ y $\forall x_1, x_2 \in I$ con $x_1 \leq x_2 \implies h(x_1, y) \leq h(x_2, y)$.
(tr4) $\forall y \in [0, c]$ y $\forall x_1, x_2 \in I$ con $x_1 \leq x_2 \implies h(x_1, y) \geq h(x_2, y)$.

Algunas consecuencias de la definición son las siguientes:

1) $h(c, c) = c$.

2) $h(x, c) = c \ \forall x \in I$. Luego, c es elemento absorbente diestro de h.

En lo que sigue daremos ejemplos de operadores TR construidos a partir de t-normas, s-normas y u-normas.

Ejemplos de operadores TR.

1) Sea $T(x, y) = xy$ (t-norma producto) y $c \in I$. Definimos: $h_{T,c}(x, y) = T(x, y) + T(1-x, c)$. A este operador se le llama **TR producto**.

Este operador TR se puede generalizar de la siguiente manera. Sea σ una función estrictamente creciente sobre I, tal que: $\sigma(0) = 0$ y $\sigma(1) = 1$. El operador: $h(x, y) = \sigma(x)y + (1 - \sigma(x))\,c$, también es un operador TR.

2) Sea S una s-norma, N una negación fuerte y $c = 1$. Entonces: $h_{S,N}(x, y) = S(N(x), y)$ es un operador TR, denominado operador **TR de implicación**.

3) Sea U la u-norma estándar conjuntiva de elemento neutro $e \in (0, 1)$. O sea:

$$U(x, y) = \begin{cases} \max\{x, y\} & (x, y) \in [e, 1]^2 \\ \min\{x, y\} & e.o.c \end{cases}$$

Entonces el operador: $h_{U,e}(x, y) = U(ex, y) + e(1-x)$ es un operador TR con respecto a e, llamado **operador TR estándar conjuntivo.**

Operador TR definido a partir de una n-norma

En el teorema siguiente, se da el procedimiento para construir operadores TR a partir de una n-norma y una negación fuerte, y por ende, se está dando un método para obtener muchos ejemplos de operadores TR.

Teorema 5.9

Sea N una negación fuerte con punto fijo $a \in (0,1)$ y V una n-norma con elemento absorbente a. Entonces el operador h definido por:

$$h_V(x, y) = \begin{cases} V(x, y) \ si \ y \in [a, 1] \\ V(N(x), y) \ si \ y \in [0, a] \end{cases} \quad (5.5)$$

Es un operador TR con respecto al elemento a.

Revista Tecnocientífica URU, Nº 6 Enero - Junio 2014 (107 - 122)

Demostración:

(tr1) Sea $y \in [a,1]$, entonces: $h_V(0,y) = V(0,y) = a$, pues: $(0,y) \in \Re_a$.

Similarmente, si: $y \in [0,a]$, entonces: $h_V(0,y) = V(1,y) = a$, pues: $(1,y) \in \Re_a$.

Por otra parte:

$$h_V(1,y) = V(1,y) = a + (1-a)T_V\left(1, \frac{y-a}{1-a}\right) = y \ \forall y \in [a,1]$$

$$h_V(1,y) = V(N(1),y) = V(0,y) = aS_V\left(0, \frac{y}{a}\right) = y \ \forall y \in [0,a]$$

(tr2) Sean: $x, y_1, y_2 \in I$ con $y_1 \leq y_2$. Para probar que h_V satisface este axioma, debemos considerar seis casos:

1) $(x,y_2) \in [0,a]^2$; 2) $(x,y_1) \in [0,a]^2$ y $(x,y_2) \in [0,a] \times [a,1]$;
3) $(x,y_1) \in [0,a] \times [a,1]$; 4) $(x,y_2) \in [a,1] \times [0,a]$;
5) $(x,y_1) \in [a,1] \times [0,a]$ y $(x,y_2) \in [a,1]^2$; 6) $(x,y_1) \in [a,1]^2$.

Demostraremos los casos: 1), 5) y 6). Los demás se prueban en forma parecida.

1) Como $y_1 \leq y_2$ y $(x,y_2) \in [0,a]^2$, entonces: $(x,y_1) \in [0,a]^2$, $(N(x),y_1) \in \Re_a$ y $(N(x),y_2) \in \Re_a$, luego: $h_V(x,y_i) = V(N(x),y_i) = a$ $(i = 1,2)$.

$$5)\ h_V(x,y_1) = V(N(x),y_1) = aS_V\left(\frac{N(x)}{a}, \frac{y_1}{a}\right) \leq a \leq a + (1-a)T_V\left(\frac{x-a}{1-a}, \frac{y_2-a}{1-a}\right) =$$
$$= V(x,y_2) = h_V(x,y_2) \Longrightarrow h_V(x,y_1) \leq h_V(x,y_2)$$

6) Como también: $(x,y_2) \in [a,1]^2$, entonces:

$$h_V(x,y_1) = V(x,y_1) \leq V(x,y_2) = h_V(x,y_2)$$

(tr3) Sean: $y \in [a,1]$ y $\forall x_1, x_2 \in I$ con $x_1 \leq x_2$. Aquí tenemos tres casos:
1) $(x_2,y) \in [0,a] \times [a,1]$; 2) $(x_1,y) \in [0,a] \times [a,1]$ y $(x_2,y) \in [a,1]^2$;
3) $(x_1,y) \in [a,1]^2$. Y la prueba, en cada caso, sigue en forma parecida a lo hecho en (tr2).
(tr4) Sean: $y \in [0,a]$ y $\forall x_1, x_2 \in I$ con $x_1 \leq x_2$. De nuevo tenemos tres casos:
1) $(x_2,y) \in [0,a]^2$; 2) $(x_1,y) \in [0,a]^2$ y $(x_2,y) \in [a,1] \times [0,a]$;
3) $(x_1,y) \in [a,1] \times [0,a]$. Probaremos solamente el caso 3), los otros siguen en forma parecida.

3) En este caso, tenemos que: $(x_2,y) \in [a,1] \times [0,a]$, luego:

$$h_V(x_1,y) = V(N(x_1),y) \geq V(N(x_2),y) = h_V(x_2,y)$$

Por lo tanto h_V es un operador TR.

Ejemplo:

Con este teorema podemos construir una gran cantidad de ejemplos de operadores TR. Por ejemplo, tomando la n-norma producto (Vea ejemplo 1, sección 4), y la negación estándar: $N(x) = 1 - x$. O sea: $a = \frac{1}{2}$. Luego:

$$V(x,y)=\begin{cases} x+y-2xy\ (x,y)\in[0,1/2]^2 \\ 2xy-x-y+1\ (x,y)\in[1/2,1]^2 \\ 1/2\ (x,y)\in\Re_{1/2} \end{cases}$$

De esta forma obtenemos:

$$h(x,y)=\begin{cases} 2xy-x-y+1 & (x,y)\in([1/2,1]\times[0,1/2])\cup[1/2,1]^2 \\ 1/2 & e.o.c \end{cases}$$

F) N-normas k-Lipschitcianas

Definición 5.6

Denominamos **función de agregación,** a una función F de I^2 en I, monótona decreciente en cada variable, y tal que: $F(0,0) = 0$ y $F(1,1) = 1$. Por ejemplo, las t-normas, s-normas, u-normas y n-normas, son funciones de agregación.

Asimismo, diremos que una función de agregación F es k - Lipschitz (k - Lips), si existe $k > 0$ tal que:

$$|F(x,y)-F(z,w)|\le k(|x-z|+|y-w|)\ (5.6)\ \forall(x,y),(z,w)\in I^2$$

Cuando F cumple (4.4) diremos que es ***k* - Lips**. Para un estudio de t-normas k - Lips, vea [2], [3] y [11].

Teorema 5.10

Sea V una n-norma con elemento absorbente $a\in[0,1]$. V es k - Lips si y solo si lo son T_V y S_V.

Demostración:

Supongamos que V es k - Lips. Y sean: $(x,y),(z,w)\in I^2$. Entonces:

$$|T_V(x,y)-T_V(z,w)|=$$

$$\left|\frac{1}{1-a}(V(a+(1-a)x,a+(1-a)y)-a)-\frac{1}{1-a}(V(a+(1-a)z,a+(1-a)w)-a)\right|=$$

$$\frac{1}{1-a}|V(a+(1-a)x,a+(1-a)y)-V(a+(1-a)z,a+(1-a)w)|.$$

Luego: $|T_V(x,y)-T_V(z,w)|\le k(|x-z|+|y-w|)$

Por lo tanto: T_V es k - Lips. De forma similar, demostramos que S_V es k - Lips.

Recíprocamente, si T_V es k_1 - Lips y S_V es k_2 - Lips, entonces ambos son k - Lips, donde: $k=\max\{k_1,k_2\}$.

Para la demostración tenemos siete casos.

1) $(x,y),(z,w)\in[0,a]^2$

En este caso, tenemos que:

$$|V(x,y)-V(z,w)| = \left|\left(a+(1-a)T\left(\frac{x-a}{1-a},\frac{y-a}{1-a}\right)\right)-\left(a+(1-a)T\left(\frac{z-a}{1-a},\frac{w-a}{1-a}\right)\right)\right|$$

$$|V(x,y)-V(z,w)| \le k(|x-z|+|y-w|)$$

2) $(x,y),(z,w)\in \Re_a$

Simplemente, tenemos: $|V(x,y)-V(z,w)| = |a-a| = 0$

3) $(x,y),(z,w)\in [a,1]^2$

Parecido al caso 1), pero aplicando la definición de S_v.

4) $(x,y)\in[0,a]^2$ y $(z,w)\in[0,a]\times[a,1]$

$$|V(x,y)-V(z,w)| = \left|aS_V\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a}\right)-aS_V\left(\frac{z}{a},\frac{a}{a}\right)\right| \le ak\left(\left|\frac{x}{a}-\frac{z}{a}\right|+\left|\frac{y}{a}-\frac{a}{a}\right|\right) =$$

$$k\big(|x-z|+(a-y)\big)\le k\big(|x-z|+(w-y)\big)=k(|x-z|+|y-w|)$$

Luego: $|V(x,y)-V(z,w)| \le\ k(|x-z|+|y-w|)$

5) $(x,y)\in[0,a]^2$ y $(z,w)\in[a,1]\times[0,a]$

La prueba es similar al caso 4).

6) $(x,y)\in[a,1]\times[0,a]$ y $(z,w)\in[a,1]^2$

$$|V(x,y)-V(z,w)| = \left|a-\left(a+(1-a)T_V\left(\frac{z-a}{1-a},\frac{w-a}{1-a}\right)\right)\right| =$$

$$=(1-a)\left|T_V\left(\frac{x-a}{1-a},\frac{0}{1-a}\right)-T_V\left(\frac{z-a}{1-a},\frac{w-a}{1-a}\right)\right| \le k(|x-z|+|w-a|) =$$

$$k\big(|x-z|+(w-a)\big)\le k\big(|x-z|+(w-y)\big)=k(|x-z|+|y-w|)$$

7) $(x,y)\in[0,a]\times[a,1]$ y $(z,w)\in[a,1]^2$

Se prueba en forma similar a 6), usando el hecho que: $T_V(a,0)=0$.

Luego, V es n-norma k - Lip

N-normas isomorfas

Sea φ una función estrictamente creciente de I sobre I, tal que: $\varphi^{-1}(a)=b$, con $a\in(0,1)$. En lo que sigue veremos cómo se construyen n-normas isomorfas a una n-norma dada V de elemento absorbente a.

Teorema 6.1

Sea φ una función estrictamente creciente de I sobre I, tal que: $\varphi^{-1}(a)=b$, con $a\in(0,1)$, y sea V una n-norma de elemento absorbente a.

Entonces: $V_\varphi(x,y) = \varphi^{-1}\big(V(\varphi(x), \varphi(y))\big)$ es una n-norma de elemento absorbente b.

Demostración:

Como $a \in [0, 1]$, entonces: $b \in (0,1), \varphi([0, b]) = [0, a]$ y $\varphi([b, 1]) = [a, 1]$.

La conmutatividad de V_φ sigue de la conmutatividad de V. Asimismo, tenemos:

$$V_\varphi\big(V_\varphi(x,y),z\big) = V_\varphi(\varphi^{-1}\big(V\big(\varphi(x),\varphi(y)\big),z\big) = \varphi^{-1}\Big(V\Big(V\big(\varphi(x),\varphi(y)\big),\varphi(z)\Big)\Big)$$

$$V_\varphi\big(V_\varphi(x,y),z\big) = \varphi^{-1}\Big(V\Big(\varphi(x),V\big(\varphi(y),\varphi(z)\big)\Big)\Big) = V_\varphi\Big(x,V_\varphi(y,z)\Big).$$

Además, como: φ, φ^{-1} y V son crecientes, se cumple que V_φ es creciente en cada variable.

Por último: $\forall x \in [0, b)$, tenemos que:

$V_\varphi(x, 0) = \varphi^{-1}(V\big(\varphi(x), \varphi(0)\big) = \varphi^{-1}(V(\varphi(x), 0) = \varphi^{-1}\big(\varphi(x)\big) = x$, pues $\varphi([0, b]) = [0, a]$.

Similarmente, como: $\varphi([b, 1]) = [a, 1]$, entonces: $\forall x \in [b, 1]$, se tiene: $V_\varphi(x, 1) = x$.

Definición 6.1

A la n-norma V_φ se le llama, **n-norma isomorfa** a V, por medio de φ.

Observaciones:

1) La n-norma V es idempotente, si y solo si, V_φ lo es. Luego, de acuerdo al ejemplo 6, de la sección 4n tenemos:

$$V = V_{min.max,a} \iff V_\varphi = V_{min,max,b}$$

2) Cuando $a = b$, es claro que: $V_\varphi = V = V_{min.max,a}$.

3) Con base en el teorema 6.1, podemos construir numerosos ejemplos de n-normas.

Por ejemplo, sean: $a, b \in (0,1), \varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{b^2}x^2 \text{ si } x \in [0, b] \\ \dfrac{a}{b}x \text{ si } x \in [b, 1] \end{cases}$ y:

$V(x,y) = \begin{cases} x + y \ (x,y) \in [0,a]^2 \ y\ x + y \le a \\ x + y - 1 \ (x,y) \in [a,1]^2 \ y\ x + y - 1 \ge a \\ a \ e.o.c. \end{cases}$. Entonces, tenemos la n-norma:

$$V_\varphi(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} \ (x,y) \in [0,b]^2 \ y\ x^2 + y^2 \le b^2 \\ x + y - \dfrac{b}{a} \ (x,y) \in [b,1]^2 \ y\ x + y - 1 \ge b \\ b \ e.o.c. \end{cases}$$

4) Sean φ y ψ, dos funciones estrictamente crecientes de I sobre I, tales que: $\varphi(b) = a$ y $\psi(c) = b$, donde $a \in [0,1]$, y sea V una n-norma de elemento absorbente a. Entonces se prueba en forma sencilla que: $V_{\varphi \circ \psi} = (V_\varphi)_\psi$ y $(V_\varphi)_{\varphi^{-1}} = (V_{\varphi^{-1}})_\varphi = V$

Referencias bibliográficas

1. Alsina,C.,et al. Associative Functions, World Scientific Publishing Co, New Jersey (2006)
2. Beliakov, G., et al. Aggregation Functions, Springer-Verlag, Berlín (2007)
3. Calvo, T., et al. The Functional Equations of Frank and Alsina for Uninorms and Nullnorms, Fuzzy Sets and Systems,120: 385-394 (2001)
4. Drygás, P. A Characterization of idempotent nullnorms, Fuzzy Sets andSystems, 145: 455-461 (2004).
5. Klement, E.P., et al. Triangular Norms, Kluwer Academic Publishers, London (2000).
6. Klir, G.J. and Yuan, B. Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications, Prentice Hall, New Jersey (1995).
7. Mas, M., et al. T-Operators. Int. J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge Based Systems, 7: 31-50 (1999).
8. Mas, M., et al. The Modularity Condition for Uninorms and t-Operators, Fuzzy Sets Syst, 126: 207-218(2002).
9. Mas,M., et al. Construction of RET Operators from Aggregation Functions, International J. of Intelligent Syst, 21(2): 155-171 (2006).
10. Rudas,I. New Approach to Information Aggregation, Artificial Intelligent. 12: 163-176 (2011).
11. Sarabia, J. Algunos Resultados sobre t-Normas. Rev. Científica, UNET (Proceso de arbitraje).
12. Sarabia, J. Algunas Propiedades de Uninormas, Rev. Acad. Canar. Ciencias 1-2: 51-69 (2010).
13. Sarabia, J. Algunas Propiedades de las n-normas (I). Revista Tecnocientífica URU. (Por aparecer), 2013.