Revista Tecnocientífica URU
Universidad Rafael Urdaneta
Facultad de Ingeniería
Nº 6 Enero - Junio 2014
Depósito legal: ppi 201402ZU4464
ISSN: 2343 - 6360

Integrales y ecuación diferencial que involucran la función de Wright

Susana Salinas de Romero[2], Daniel Meza[1] y Marleny Fuenmayor[2]

Dedicado al Dr. Shyam Kalla en su 76º aniversario

[1]Universidad Popular del César.

[2]Centro de Investigación de Matemática Aplicada (C.I.M.A.). Facultad de Ingeniería.
Universidad del Zulia

Recibido: 31-10-2013 Aceptado: 13-11-2013

Resumen

Este artículo está basado en el estudio de la función de Wright $p\Psi q$, la función hipergeométrica generalizada pFq y el polinomio general $S_q^p[x]$. Por último, como un ejemplo de aplicación a la función de Wright, se considera el problema de obtener la solución de la ecuación del calor de segundo orden con condición en la frontera de una barra uniforme.

Palabras clave: Función H de Fox, función de Wright, la función pFq, y ecuación de calor unidimensional.

Integrals and differential equations involving Wright functions

Abstract

This article is based on the study of Wright's function, hypergeometric generalized's pFq function and the general polynomial $S_q^p[x]$. Finally as an application example of Wright function is considered the problem to obtain the solution of the heat second-order differential equation condition, on a uniform rod.

Key words: H-Fox's function, Wright's function, pFq, function, one dimensional heat equation.

Introducción

En las matemáticas aplicadas tienen gran relevancia las funciones especiales, ya que estas aparecen en la solución de ecuaciones diferenciales. Entre la funciones especiales mas importante están las funciones hipergeométricas: la función de Gauss, la función hipergeométrica generalizada ${}_pF_q$, la función de Appell, la función de Humbert, la función de Lauricella, la función H de Fox, [6,7], la función de Wright, entre otras. Estas se encuentran en muchas aplicaciones en estadística, teoría cuántica, ecuaciones funcionales, vibración de vigas, conducción de calor, elasticidad, radiación, y en general, en aplicaciones a la ingeniería, etc. Debido a su importancia se estudian sus propiedades, desarrollos asintóticos, desarrollos en serie, etc., a fin de obtener un estudio detallado del comportamiento analítico de tales funciones.

El objetivo de este trabajo de investigación es evaluar algunas integrales que envuelven algunas funciones especiales entre ellas la función de Wright, la función pFq y resolver la ecuación del calor de segundo orden unidimensional con condiciones de frontera que envuelven la función de Wright. Otros autores han evaluado funciones integrales que involucran funciones especiales [2-10,12], y han presentado otras generalizaciones de las funciones hipergeométricas y sus propiedades [9,11,13-19]. Una característica importante de la función de Wright $p\Psi q$ [15, 19-21] es que generaliza la función hipergeométrica usual ${}_pF_q$, lo cual hace que los resultados obtenidos de $p\Psi q$ sean de interés.

La Función Hipergeométrica Generalizada de Wright

Una interesante generalización de la serie $p\Psi q$ fue introducida por el matemático E. M. Wright (1935 a 1940) quien estudió la expansión asintótica de la función generalizada definida por: [13, p. 21, No. (38)]

$$p\Psi q\left[\begin{matrix}(\alpha_1, A_1),(\alpha_2, A_2),...,(\alpha_p, A_p);\\(\beta_1, B_1),(\beta_2, B_2),...,(\beta_q, B_q);\end{matrix} z\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left(\alpha_j + A_j{}^n\right)z^n}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(\beta_j + B_j{}^n\right)n!}, \tag{1}$$

donde los coeficientes, $A_1, A_2,..., A_p$ y $B_1, B_2,..., B_q$ son números reales positivos tales que: [14, p. 21, No. (39)]

$$1+\sum_{j=1}^{q} B_j - \sum_{j=1}^{p} A_j \geq 0 \text{ donde } A_p, B_q \in \Re^+$$

Si comparamos la definición [14, p. 21, No. (40)], tenemos:

$$p\Psi q\left[\begin{matrix}(\alpha_1,1),(\alpha_2,1),...,(\alpha_p,1);\\(\beta_1,1),(\beta_2,1),...,(\beta_q,1);\end{matrix} z\right] = \frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(\alpha_j)z^n}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(\beta_j)n!}\, {}_pF_q\left[\begin{matrix}\alpha_1,...,\alpha_p;\\ \beta_1,...,\beta_q;\end{matrix} z\right], \tag{2}$$

El polinomio $S_q^p[x]$ se define como [8, eq., (16)]

$$S_q^p[x] = \sum_{k=0}^{[q/p]} \frac{(-q)_{p,k}}{k!} F_{q,k} x^k, q = 0,1,2,... \tag{3}$$

donde p es un entero positivo arbitrario y los coeficientes de $F_{q,k}(q,k) \geq 0$ son constantes reales o complejas arbitrarias. Al especificar adecuadamente los coeficientes de $F_{q,k}$, el polinomio $S_q^p[x]$ puede ser reducido, a polinomios clásicos ortogonales conocidos, tales como Jacobi, Hermite, Legendre, Chebyshev y polinomios de Laguerre.

Los siguientes resultados son obtenidos por Chaurasia [3]

$$\int_0^L \left(sen\frac{\pi x}{l}\right)^{w-1} sen\frac{\lambda_m \pi x}{L}\,dx = L2^{1-w} sen\frac{\lambda_m \pi x}{2} \frac{\Gamma(w)}{\Gamma\left(\frac{w \mp \lambda_m + 1}{2}\right)}; \qquad \text{Re}(w) > 0 \tag{4}$$

$$\int_0^L \left(sen\frac{\pi x}{l}\right)^{w-1} \cos\frac{\lambda_m \pi x}{L}\,dx = L2^{1-w} \cos\frac{\lambda_m \pi x}{2} \frac{\Gamma(w)}{\Gamma\left(\frac{w \mp \lambda_m + 1}{2}\right)}; \qquad \text{Re}(w) > 0 \tag{5}$$

Integrales que involucran a la Función de Wright

Consideremos la siguiente integral

$$I = \int_{-1}^{1} (1+t)^{2\rho-1} (1-t)^{2\nu-1} \, p\Psi q \left[\begin{matrix} (\lambda_1,1),\ldots,(\lambda_p,1); \\ (u_1,1),\ldots,(u_q,1); \end{matrix} \frac{(1-t^2)^{2i}}{(1+t^2)^{2i}} \right] dt \tag{6}$$

Usando la definición de la función de Wright, dada por la ecuación (1), se tiene

$$\int_{-1}^{1} (1+t)^{2\rho-1} (1-t)^{2\nu-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{p} \Gamma(\lambda_j + n)}{\prod_{j=1}^{q} \Gamma(u_j + n) n!} (1-t^2)^{2ni} (1+t^2)^{-2ni} \right] dt$$

Intercambiando el orden de integración y la suma en base a la convergencia absoluta [1],

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{p} \Gamma(\lambda_j + n)}{\prod_{j=1}^{q} \Gamma(u_j + n) n!} \int_{-1}^{1} (1+t)^{2\rho-1} (1-t)^{2\nu-1} (1-t^2)^{-\rho-\nu} (1+t^2)^{-2ni} dt \tag{7}$$

Sea

$$I_1 = \int_{-1}^{1} (1+t)^{2\rho-1} (1-t)^{2\nu-1} (1+t^2)^{-\rho-\nu-2.} \; (1-t^2)^{2} \; dt.$$

Haciendo en esta integral el cambio de variable y realizando las operaciones respectivas, se obtiene

A

$$I_1 = \int_{-1/2}^{\infty} \left(1+\frac{u}{1+u}\right)^{2\rho-1} \left(1-\frac{u}{1+u}\right)^{2\nu-1} \left(1+\left(\frac{u}{1+u}\right)^2\right)^{-\rho-\nu-2ni} \left(1-\left(\frac{u}{1+u}\right)^2\right)^{2ni} \frac{1}{(1+u)^2} du \,. \tag{8}$$

Luego, se tiene

$$I_1 = \int_{-1/2}^{\infty} (1+2u)^{2\rho-1} (1+2u \mathbin{\dot{+}} 2u^2)^{-\rho-\nu-2ni} (1+2u)^{2ni} du \,.$$

Teniendo en cuenta un nuevo cambio de variable $1+2u = \tan\theta$ y las operaciones respectivas, con el cambio de límites de integración, se obtiene

$$I_1 = 2^{\rho+\nu+2ni-1} \int_{0}^{\pi/2} sen^{\rho+\nu+2ni-1}(\theta) \cos^{\rho+\nu+2ni-1}(\theta) d\theta$$

Luego, usando la definición de la función beta, se tiene

$$I_1 = 2^{\rho+\nu+2ni-1} \frac{\Gamma(\rho+ni)\Gamma(\nu+ni)}{\Gamma(\rho+2ni+\nu)} \tag{9}$$

Sustituyendo la ecuación (9) en (7), se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{p} \Gamma(\lambda_j + n)}{\prod_{j=1}^{q} \Gamma(u_j + n) n!} 2^{\rho+\nu+2ni-1} \frac{\Gamma(\rho + ni)\Gamma(\nu + ni)}{\Gamma(\rho + 2ni + \nu)}$$

$$= 2^{\rho+\nu-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{p} \Gamma(\lambda_j + n)}{\prod_{j=1}^{q} \Gamma(u_j + n) n!} \frac{\Gamma(\rho + ni)\Gamma(\nu + ni)}{\Gamma(\rho + \nu + 2ni)} 4^{ni}$$

Usando la representación en serie para $p\Psi q$, se tiene

$$= 2^{\rho+\nu+2ni-2} {}_{(p+2i)}\Psi_{q+i} \left[\begin{matrix} (\lambda_1,1),\ldots,(\lambda_p,1),(\rho,i)(\nu,i); \\ (u_1,1),\ldots,(u_q,1),(\rho+\nu,2i); \end{matrix} 4^i \right]$$

donde $i \in N$, $\operatorname{Re}(\rho)$, $\operatorname{Re}(\nu) > 0$ $u_i \neq 0,-1,-2,\ldots,$ $i = 1,2,\ldots,q$

Evaluación de Integrales con la Función de Wright

Considerando la siguiente integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2 + bxy + cy^2)} p\Psi q \left[\begin{matrix} (a_1, A_1),\ldots,(a_p, A_p); \\ (b_1, B_1),\ldots,(b_q, B_q); \end{matrix} c \right] dxdy$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{4ac - b^2}} p\Psi q \left[\begin{matrix} (a_1, A_1),\ldots,(a_p, A_p); \\ (b_1, B_1),\ldots,(b_q, B_q); \end{matrix} c \right].$$

Usando la definición de la función de Wright, dada por la ecuación (1), se tiene

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2 + bxy + cy^2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{p} \Gamma(a + A_j n)}{\prod_{j=1}^{q} \Gamma(b + B_j n) n!} c^n dxdy. \quad (10)$$

En virtud de que la serie converge absolutamente, es posible intercambiar la suma con la integral [1]

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{p} \Gamma(a + A_j n)}{\prod_{j=1}^{q} \Gamma(b + B_j n) n!} c^n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2 + bxy + cy^2)} dxdy. \quad (11)$$

Sea $I_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(ax^2+bxy+cy^2\right)}dxdy.$

Efectuando la siguiente sustitución, utilizando la definición $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$, se obtiene

$$u=\sqrt{a}x+\frac{by}{2\sqrt{a}}, \quad y \quad \frac{du}{\sqrt{a}}=dx \;;\; I_1=\frac{2\pi}{\sqrt{4ac-b^2}}, \tag{12}$$

Reemplazando y usando la representación en serie de (1), se tiene

$$I=\frac{2\pi}{\sqrt{4ac-b^2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left(a+A_j n\right)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(b+B_j n\right)n!}c^n,$$

$$=\frac{2\pi}{\sqrt{4ac-b^2}}\,p\Psi q\left[\begin{matrix}(a_1,A_1),\dots,(a_p,A_p);\\(b_1,B_1),\dots,(b_q,B_q);\end{matrix}\; c\right]. \tag{13}$$

Re(a), Re(b) > 0, Re($4ac - b^2$) > 0.

Caso Particular

En este trabajo se obtienen, como caso particular de la integral generalizada, la siguiente integral con funciones hipergeométricas ${}_pF_q(z)$:
haciendo $A_1 = A_2 =,\dots,= A_p = 1;$ $B_1 = B_2 =,\dots,= B_q = 1$ y usando la definición (2),

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\left(ax^2+bxy+cy^2\right)}{}_pF_q\left[\begin{matrix}(a_1),\dots,(a_p);\\(b_1),\dots,(b_q);\end{matrix}\; c\right]dxdy$$

$$=\frac{2\pi}{\sqrt{4ac-b^2}}\,{}_pF_q\left[\begin{matrix}(a_1),\dots,(a_p);\\(b_1),\dots,(b_q);\end{matrix}\; c\right].$$

Re(a), Re(b) > 0, Re($4ac - b^2$) > 0.

Un problema de valores iniciales con condiciones que involucran la función de Wright

Como ejemplo de la aplicación de la función Wright multivariable de la matemática aplicada, vamos a considerar el problema de flujo de calor en una barra uniforme con condiciones de contorno, es decir, el problema de la conducción de calor en la barra uniforme con la condición Robin a temperatura cero, con la radiación en los extremos dentro de la media. Usando la función de Wright (1) y una clase de polinomio general (3). Si el coeficiente térmico es constante y no hay ninguna fuente de energía térmica, la $u(x,t)$ que representa la temperatura en una varilla de longitud L , $0 < x < L$, y u debe satisfacer la ecuación del calor.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, t>0, 0<x<L \tag{14}$$

Sujeto a la condición inicial:

$$u(x,0)=\left(sen\frac{\pi x}{L}\right)^{w-1} S_q^p\left[\left(sen\frac{\pi x}{L}\right)^{2\sigma}\right] p\Psi q\left[\begin{matrix}(\alpha_1,A_1),\ldots,(\alpha_p,A_p);\\(\beta_1,B_1),\ldots,(\beta_q,B_q);\end{matrix}\left(sen\frac{\pi x}{L}\right)^{2}\right]$$ (15) Y a la condición de frontera

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,t)-hu(0,t)=0,\quad t>0,\quad h>0 \tag{16}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(L,t)-hu(L,t)=0,\quad t>0,\quad h>0 \tag{17}$$

Solucionando la ecuación (14) por el método de separación de variables

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

Obteniendo las derivadas parciales y sustituyendo obtenemos dos ecuaciones diferenciales ordinarias lineales con coeficientes constantes y otra de variables separables cuya solución es la siguiente

$$u(x,t)=\left[A\cos(\lambda x)+Bsen(\lambda x)\right]e^{-\mu\lambda^2 t} \tag{18}$$

Aplicando la condición de frontera y realizando las operaciones respectivas se obtiene

$$B=\frac{hA}{\lambda},\ \lambda\neq 0 \tag{19}$$

$$\tan(\lambda L)=\frac{2h\lambda}{(\lambda^2-h^2)},h\neq\lambda \tag{20}$$

En donde λ_n satisfacen (20) y son infinitos valores propios. Utilizando algunos métodos numéricos como el de Newton, el de Punto fijo y el de Bisección se verificó cuál de estos da una mejor aproximación para calcular los valores propios.

Observando el método de Newton los valores generados son muy oscilantes y no dan la mejor convergencia para los valores propios de la función (20). El método Punto fijo únicamente muestra el punto inicial y las demás raíces no. Estos dos métodos no fueron consistentes.

El método que mostró mejores resultados para calcular los valores propios de (20) fue el de Bisección.

A continuación se presenta un ejemplo donde se calcula el valor propio entre el intervalo [0, 0.2] ver Fig. 1.

Resultados del método de bisección según la rutina de Matlab Versión (7.01)

Tabla 1.

iter	Valor propio	Error
1	0.10000000000000	
2	0.15000000000000	0.05000000000000
3	0.12500000000000	0.02500000000000
4	0.11250000000000	0.01250000000000
5	0.11875000000000	0.00625000000000
6	0.12187500000000	0.00312500000000
7	0.12343750000000	0.00156250000000
8	0.12265625000000	0.00078125000000
9	0.12304687500000	0.00039062500000
10	0.12324218750000	0.00019531250000
11	0.12314453125000	0.00009765625000
12	0.12319335937500	0.00004882812500
13	0.12321777343750	0.00002441406250
14	0.12320556640625	0.00001220703125
15	0.12319946289063	0.00000610351563
16	0.12320251464844	0.00000305175781
17	0.12320404052734	0.00000152587891
18	0.12320327758789	0.00000076293945
19	0.12320289611816	0.00000038146973
20	0.12320270538330	0.00000019073486

La raíz que se obtuvo con una tolerancia de 10^{-7} es 0.12320270538330

Figura No 1

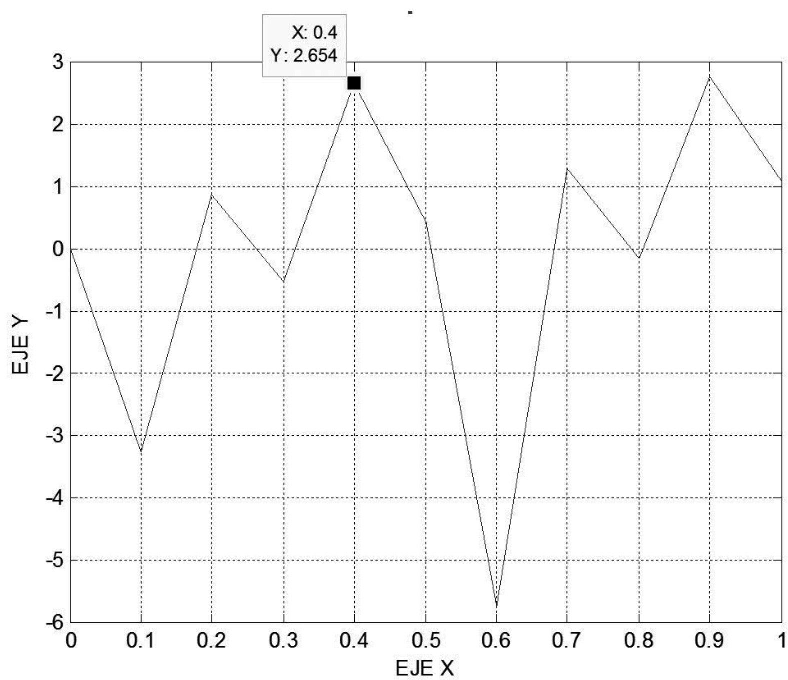

Fig. 1. Gráfica del Método de Bisección

Utilizando el principio de superposición

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n\left[\cos(\lambda_n x)+\frac{h}{\lambda_n}sen(\lambda x)\right]e^{-\mu\lambda_n^2 t} \tag{21}$$

Aplicando las condiciones iniciales a la ecuación (20) y utilizando los conceptos de ortogonalidad, ortonormalidad para hallar A_n y las identidades trigonométricas, se obtiene el siguiente resultado:

$$A_n=\frac{2\lambda_n^2}{\left[\left(\lambda_n^2+h^2\right)L+2h\right]}\int_0^L\left[\lambda_n\cos(\lambda_n x)+hsen(\lambda_n x)\right]$$

$$\times\left(sen\frac{\pi x}{L}\right)^{w-1}S_q^p\left[\left(sen\frac{\pi x}{L}\right)^{2\sigma}\right]p\Psi q\left[\begin{matrix}(\alpha_1,A_1),\ldots,(\alpha_p,A_p);\\(\beta_1,B_1),\ldots,(\beta_q,B_q);\end{matrix}\left(sen\frac{\pi x}{L}\right)^2\right]dx \tag{22}$$

Luego, usando (4) y (5), se tiene

$$\int_0^L\left[\lambda_n\cos(\lambda_n x)+hsen(\lambda_n x)\right]\left[\lambda_m\cos(\lambda_m x)+hsen(\lambda_m x)\right]dx$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2\lambda_n^2}{\left[\left(\lambda_n^2+h^2\right)L+2h\right]}, & m=n\\ 0 & m\neq n\end{cases} \tag{23}$$

$$A_{n=}\int_0^L\left[\lambda_n\cos(\lambda_n x)+hsen(\lambda_n x)\right]\left(sen\frac{\pi x}{L}\right)^{w-1}S_q^p\left[\left(sen\frac{\pi x}{L}\right)^{2\sigma}\right]$$

$$.p\Psi q\left[\begin{matrix}(\alpha_1,A_1),\ldots,(\alpha_p,A_p);\\(\beta_1,B_1),\ldots,(\beta_q,B_q);\end{matrix}\left(sen\frac{\pi x}{L}\right)^2\right]dx \tag{24}$$

Aplicando las definiciones (1) y (2) en (24) se obtiene

$$\int_0^L\left[\lambda_n\cos(\lambda_n x)+hsen(\lambda_n x)\right]\left(sen\frac{\pi x}{L}\right)^{w-1}$$

$$\sum_{k=0}^{[q/p]}\frac{(-q)_{pk}}{k!}F_{q,k}\left(sen\frac{\pi x}{L}\right)^{2\sigma k}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma\left(\alpha_j+A_jn\right)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma\left(b_j+B_jn\right)}\frac{\left(sen\frac{\pi x}{L}\right)^{2k}}{n!}dx \tag{25}$$

Intercambiando el orden de la integral y la suma en base a la convergencia absoluta, se obtiene [1]

$$A_{n=}\sum_{k=0}^{[q/p]}\frac{(-q)_{pk}}{k!}F_{q,k}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{p}\Gamma(\alpha_j+A_jn)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j+B_jn)}\frac{z^k}{n!}$$

$$\int_0^L[\lambda_n\cos(\lambda_nx)+hsen(\lambda_nx)]\left(sen\frac{\pi x}{L}\right)^{w-1}\left(sen\frac{\pi x}{L}\right)^{2\sigma k}\left(sen\frac{\pi x}{L}\right)^{2k}dx. \qquad (26)$$

Realizado las operaciones respectivas, teniendo en cuenta los resultados (5) y (6), y la representación en serie (1) en la ecuación (26)

$$u(x,t)=\frac{2L}{2^{w+2k(\sigma+1)-1}}\sum_{k=0}^{[q/p]}\frac{(-q)_{pk}}{k!}F_{q,k}\frac{2\lambda_n^2}{[(\lambda_n^2+h^2)L+2h]}$$

$$\times\left[\cos(\lambda_nx)+\frac{h}{\lambda_n}sen(\lambda_nx)\right]e^{-\mu\lambda_n^2t}\left[\lambda_n\cos\left(\frac{\lambda_n\pi}{2}\right)+hsen\left(\frac{\lambda_n\pi}{2}\right)\right]$$

$$\times\frac{\Gamma(w+2k(\sigma+1))}{\Gamma(w\pm2k(\sigma+1)+\lambda_n+1)}p\Psi q\left[\begin{matrix}(\alpha_1,A_1),\ldots,(\alpha_p,A_p);\\(\beta_1,B_1),\ldots,(\beta_q,B_q);\end{matrix}1\right] \qquad (27)$$

$$\sigma>0,k>0$$

Agradecimiento

Los autores agradecen al CONDES, Universidad del Zulia, por el soporte financiero.

Bibliografía

1. Braaksma, B.L.J. Asymptotic expansions and analytic for a class of Barnes integrals, Composition Math. 15 (1963), 239-341.
2. Chaurasia, V.B.L. and Godika, Anju An integral involving certain product of especial functions, Bull. Cal.Math.Soc.91 (1999), 337-342.
3. Chaurasia, V.B.L. and Ashok Singh Shekhawat An integral involving general polynomials and the H-function of several complex variables, May 31 (2004), 300-306).
4. Chirino, A. (1994) Algunos resultados sobre la función hipergeométricas de Wright. Trabajo de grado. División de Postgrado. Facultad de Ingeniería Universidad de Zulia .Maracaibo Venezuela.
5. Duque, D. (2000). Integrales que involucran funciones generalizadas de tipo hipergeométricas. Trabajo de grado. División de Postgrado. Facultad de Ingeniería Universidad de Zulia .Maracaibo Venezuela.
6. Galué, L. and Duque, D. (2004). Some integrals involving Wright's hipergeometrics function. Rev. Tec. Ing. Univ. Zulia. 27 (1), 13-19.

7. Goyal, S.P. and Math, S.L. On integrals involving the H-function of two variables, Indian J. Pure & Apel. Math. 7 (1976), 347-358.
8. Gupta, K.C. and Jain, R. An integrals involving a general polynomial and product of Fox`s H- function having general arguments, Ganita Sandesh 3(1989), 64-67.
9. Mathai, A.M, and Saxena, R.K (1977). The H-function with Applications in Statistics and other Disciplines. New York. London Sydney Toronto.
10. Muñoz, Carlos. (2005). Algunos resultados que involucran cálculo fraccional y la función de Wright. Trabajo de grado. División de Postgrado. Facultad de Ingeniería Universidad de Zulia. Maracaibo Venezuela.
11. Nishimoto, K. (1991). Fractional Calculus: Integrations and Differentiations of Arbitrary Order, Vol. 1.
12. Prieto, A. Romero, S. and Srivastava, H. (2007). Some fraccional-calculus results involving the generalized Lommel-Wright and related functions. Science Direct. Applied Mathematics Letters.
13. Saxena, R.K. An integral involving G-function, Proc. Nat. Inst. Sci. India 26A (1960), 661-664**.**
14. Srivastava, H.M. A multilinear generating function for the Kohnauser sets of bi- orthogonal polynomials suggested by the Laguerre, Pacific J.Math 117(1985), 183-191.
15. Srivastava, H. M. and Karlsson, P. W.: Multiple Gaussian Hypergeometric Series. Ellis Horwood Limited. England, 1985.
16. Srivastava, H.M. and Panda, R. Some bilateral generating function for a class of generalized hypergeometric polynomials J. Raine Angew.Math, 283/284(1996), 265-274.
17. Srivastava, H.M. and Goyal, S.P. Fractional derivatives of the H-function of several complex variables, J.Math.Anal.Appl.112 (1985), 641-651.
18. Srivastava, H.M. and Panda, R.**,** Certain expansion formulas involving the generalized Lauricella function, I Comment Math .Univ.St. Paul 24 (1974), 7-14.
19. Virchenko, N.A. On some generalizations of the functions of hypergeometric type. Fractional Calculus & Applied 2. No 3 (1999).233-244.
20. Wright, E.M. The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function. Jour. London Math. Soc. 10(1935).286-293.