Revista Tecnocientífica URU
Universidad Rafael Urdaneta
Facultad de Ingeniería
Nº 6 Enero - Junio 2014
Depósito legal: ppi 201402ZU4464
ISSN: 2343 - 6360

Algunos resultados sobre la función de Bessel de tres variables

Ana Isolina Prieto[1], Josefina Matera[1], Leda Galué[1] y Susana Salinas[1,2]

[1]Universidad del Zulia. Facultad de Ingeniería. Centro de Investigación de Matemática Aplicada (CIMA). Apartado de correo 10482.
aisolinap@hotmail.com, pinamatera@yahoo.es, ledagalue@hotmail.com

[2]Departamento de Ciencias Básicas. Facultad de Ingeniería. Universidad Rafael Urdaneta.
susanaderomero@hotmail.com
Maracaibo-Venezuela

Dedicado al Dr. Shyam Kalla en su 76º aniversario

Recibido: 31-10-2013   Aceptado: 13-11-2013

Resumen

Las funciones especiales han jugado un rol importante en el desarrollo de la Matemática pura y las teorías físicas, estas funciones son importantes para científicos e ingenieros en muchas áreas de aplicación. En particular, las funciones de Bessel son de gran interés en el compo de las funciones espaciales. Las funciones de Bessel están relacionadas con la teoría de potencial, procesos multifotón y en campos de radiación y, en general, en problemas de física, matemática e ingeniería. En este trabajo se introduce la definición de la función de Bessel de tres variables, dos parámetros y un índice; además, se presentan propiedades de simetría, relaciones de recurrencia y ecuaciones diferenciales que satisfacen estas funciones.

Palabras clave: Función de Bessel de tres variables, relaciones de recurrencia, ecuaciones diferenciales.

Some results on Bessel function of three variables

Abstract

Special functions have played an important roll in the development of pure mathematics and theorical physics, these functions are important to scientists and engineers in many areas of application. In particular Bessel functions are great interest in the field of special functions. The Bessel functions are related with potential theory, multifoton processes, radiation fields and generally physics, mathematics and engineering problems. In this paper the definition of the Bessel function of three variables, two parameters and one index are introduced, moreover symmetry properties, recurrence relationships and differential equations that satisfy are presented.

Key words: Bessel functions of three variables, recurrence relationships, differential equation.

Introducción

Las funciones especiales son igualmente importantes para las matemáticas pura y aplicada [1]. Un tipo importante de estas funciones son las funciones de Bessel. El análisis de las funciones de Bessel ha abierto nuevos y fascinantes escenarios debido a que permite resolver una amplia variedad de problemas, por ejemplo, aplicación en la solución de ecuaciones diferenciales en matemática, en procesos multifoton [2], en el campo de radiación [3] y en otras ramas de la ciencia y tecnología.

Muchos autores han definido y estudiado diferentes formas generalizadas de la función de Bessel: C. Chiccoli et al. [4], proveen una visión unificada de la teoría de las funciones de Bessel, L. Galué [5] introduce las series Kapteyn para las funciones de Bessel, G. Dattoli et al. [6] introduce un método para derivar familias de funciones generadoras de las funciones de Bessel, Pathan et al. [7] obtienen diferentes funciones generadoras para la función de Bessel generalizada de dos variables y un parámetro $J_n(x, y; \tau)$ definida por

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)+\frac{y}{2}\left(t^2\tau-\frac{1}{t^2\tau}\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^n J_n(x, y; \tau). \tag{1}$$

donde x, y son variables reales y $t,\ \tau$ son parámetros complejos diferentes de cero con $|t|,\ |\tau| < \infty$.

Para $y = 0$, la función (1) se reduce a la conocida función generadora de una variable de la función cilíndrica de Bessel $J_n(x)$, esto es

$$exp\left[\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^n J_n(x). \tag{2}$$

Consecuentemente, esto ha inspirado la investigación de la función de Bessel de tres variables, dos parámetros y un índice; aquí se introduce la función generadora, propiedades de simetría, relaciones de recurrencia y ecuaciones diferenciales que satisfacen.

Definición

Se introduce la función de Bessel generalizada de tres variables, dos parámetros y un índice $J_n(x, y, z; \tau, \delta)$ mediante la función generadora

$$exp\left[\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)+\frac{y}{2}\left(t^2\tau-\frac{1}{t^2\tau}\right)+\frac{z}{2}\left(t^3\delta-\frac{1}{t^3\delta}\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x, y, z; \tau, \delta). \tag{3}$$

donde x, y y z son variables reales y $t,\ \tau$ y δ son parámetros complejos diferentes de cero con $|t|,\ |\tau|$ y $|\delta| < \infty$.

Si en (3) se hace $z = 0$, se obtiene la función de Bessel (1) dada por Pathan [7].

Es obvio que si $y = z = 0$, (3) reduce a la conocida función de Bessel $J_n(x)$ dada en (2).

Demostración

Aplicando las propiedades de la exponencial del lado izquierdo de (3)

$$exp\left[\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)+\frac{y}{2}\left(t^2\tau-\frac{1}{t^2\tau}\right)+\frac{z}{2}\left(t^3\delta-\frac{1}{t^3\delta}\right)\right]=$$

$$exp\left[\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]exp\left[\frac{y}{2}\left(t^2\tau-\frac{1}{t^2\tau}\right)\right]exp\left[\frac{z}{2}\left(t^3\delta-\frac{1}{t^3\delta}\right)\right]$$

usando (2)

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty} t^m J_m(x) \sum_{h=-\infty}^{\infty} (t^2\tau)^h J_h(y) \sum_{k=-\infty}^{\infty} (t^3\delta)^k J_k(z)$$

$$=\sum_{m,h,k=-\infty}^{\infty} t^{m+2h+3k}\,\tau^h\delta^k J_m(x)\,J_h(y)\,J_k(z).$$

Si $n = m + 2h + 3k, \Rightarrow m = n - 2h - 3k$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n \sum_{h,k=-\infty}^{\infty} \tau^h\delta^k J_{n-2h-3k}(x)\,J_h(y)\,J_k(z).$$

Comparando con (3), resulta

$$J_n(x,y,z;\tau,\delta)=\sum_{h,k=-\infty}^{\infty} \tau^h\delta^k J_{n-2h-3k}(x)\,J_h(y)\,J_k(z). \tag{4}$$

representación en serie de $J_n(x,y,z;\tau,\delta)$.

Propiedades de simetría de $J_n(x,y,z;\tau,\delta)$

Las propiedades de simetría de la función de Bessel $J_n(x,y,z;\tau,\delta)$ pueden inferirse de la serie (4) y de la definición de la función de Bessel de primera clase de orden n [1,pág. 99 No. (5.2.2)].

$$J_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(z/2)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!}\;,\quad |z|<\infty. \tag{5}$$

la cual satisface las propiedades de simetría

$$J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x)=J_n(-x) \tag{6}$$

A continuación se presentan algunas propiedades de simetría para $J_n(x,y,z;\tau,\delta)$

$$J_{-n}\left(x, y, z; \frac{1}{\tau}, \frac{1}{\delta}\right) = (-1)^n J_n(x, y, z; -\tau, \delta) = J_n(-x, -y, -z; \tau, \delta) \tag{7}$$

$$J_{-n}(x, y, z; \tau, \delta) = (-1)^n J_n(x, y, z; \tau, -\delta) = J_n(-x, -y, z; -\tau, \delta) \tag{8}$$

$$J_{-n}(x, y, z; \frac{1}{\tau}, \frac{-1}{\delta}) = (-1)^n J_n(x, y, z; -\tau, -\delta) = J_n(-x, y, z; -\tau, \delta) \tag{9}$$

$$J_{-n}\left(x, y, z; \frac{-1}{\tau}, \frac{1}{\delta}\right) = (-1)^n J_n(x, y, z; \tau, \delta) = J_n(-x, y, z; \tau, -\delta) \tag{10}$$

Se pueden calcular muchas otras relaciones de recurrencia para la función $J_n(x, y, z; \tau, \delta)$. A continuación se presenta la demostración de una de ellas y de manera similar, se pueden demostrar las demás propiedades de simetría.

Demostración de (7)

Sustituyendo x por $-x$, y por $-y$,z por $-z$ en (41), se tiene

$$J_n(-x, -y, -z; \tau, \delta) = \sum_{h,k=-\infty}^{\infty} \tau^h \delta^k J_{n-2h-3k}(-x)\, J_h(-y)\, J_k(-z).$$

usando (6)

$$\sum_{h,k=-\infty}^{\infty} \tau^h \delta^k (-1)^{n-2h-3k} J_{n-2h-3k}(x)(-1)^h J_h(y)(-1)^k J_k(z)$$

$$= (-1)^n \sum_{h,k=-\infty}^{\infty} (-\tau)^h \delta^k J_{n-2h-3k}(x) J_h(y)\, J_k(z)$$

obteniendo así el resultado intermedio de (7),

$$J_n(-x, -y, -z; \tau, \delta) = (-1)^n J_n(x, y, z; -\tau, \delta)$$

De (4) y usando (6)

$$J_n(-x, -y, -z; \tau, \delta) = \sum_{h,k=-\infty}^{\infty} \tau^h \delta^k J_{n-2h-3k}(-x)_h(-y)\, J_k(-z)$$

$$= \sum_{h,k=-\infty}^{\infty} \tau^h \delta^k J_{-n+2h+3k}(x) J_{-h}(y)\, J_{-k}(z)$$

con $h=-s$ y $k=-r$, se tiene

$$= \sum_{s,r=-\infty}^{\infty} (\tau)^{-s}(\delta)^{-r} J_{-n-2s-3r}(x) J_s(y) J_r(z)$$

$$J_n(-x,-y,-z;\tau,\delta) = J_{-n}\left(x,y,z;\frac{1}{\tau},\frac{1}{\delta}\right).$$

Demostrando así la propiedad de simetría (7).

Relaciones de recurrencia

Las relaciones de recurrencia para $J_n(x,y,z;\tau,\delta)$ son:

$$\frac{\partial}{\partial x} J_n(x,y,z;\tau,\delta) = \frac{1}{2}[J_{n-1}(x,y,z;\tau,\delta) - J_{n+1}(x,y,z;\tau,\delta)] \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} J_n(x,y,z;\tau,\delta) = \frac{1}{2}\left[\tau J_{n-2}(x,y,z;\tau,\delta) - \frac{1}{\tau} J_{n+2}(x,y,z;\tau,\delta)\right] \tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} J_n(x,y,z;\tau,\delta) = \frac{1}{2}\left[\delta J_{n-3}(x,y,z;\tau,\delta) - \frac{1}{\delta} J_{n+3}(x,y,z;\tau,\delta)\right] \tag{13}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} J_n(x,y,z;\tau,\delta) = \frac{y}{2}\left[J_{n-2}(x,y,z;\tau,\delta) + \frac{1}{\tau^2} J_{n+2}(x,y,z;\tau,\delta)\right] \tag{14}$$

$$\frac{\partial}{\partial \delta} J_n(x,y,z;\tau,\delta) = \frac{z}{2}\left[J_{n-3}(x,y,z;\tau,\delta) + \frac{1}{\delta^2} J_{n+3}(x,y,z;\tau,\delta)\right] \tag{15}$$

$$\begin{aligned} n J_n(x,y,z;\tau,\delta) &= \frac{x}{2}[J_{n-1}(x,y,z;\tau,\delta) + J_{n+1}(x,y,z;\tau,\delta)] \\ &+ y\left[\tau J_{n-2}(x,y,z;\tau,\delta) + \frac{1}{\tau} J_{n+2}(x,y,z;\tau,\delta)\right] \\ &+ \frac{3z}{2}\left[\delta J_{n-3}(x,y,z;\tau,\delta) + \frac{1}{\delta} J_{n+3}(x,y,z;\tau,\delta)\right] \end{aligned} \tag{16}$$

Demostración de (11)

Sea w la función generadora dada en (3),

$$w = exp\left[\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) + \frac{y}{2}\left(t^2\tau - \frac{1}{t^2\tau}\right) + \frac{z}{2}\left(t^3\delta - \frac{1}{t^3\delta}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x, y, z; \tau, \delta). \tag{17}$$

Derivando w con respecto de x

$$\frac{\partial w}{\partial x} = exp\left[\frac{x}{2}\left(1 - \frac{1}{t}\right) + \frac{y}{2}\left(t^2\tau - \frac{1}{t^2\tau}\right) + \frac{z}{2}\left(t^3\delta - \frac{1}{t^3\delta}\right)\right] \cdot \left[\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right]$$

esto es,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{w}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) = \frac{wt}{2} - \frac{w}{2t}$$

Sustituyendo w por su desarrollo en serie (17)

$$\frac{\partial}{\partial x}\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x, y, z; \tau, \delta)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^{n+1} J_n(x, y, z; \tau, \delta) - \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^{n-1} J_n(x, y, z; \tau, \delta)$$

realizando cambio de índices

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n \frac{\partial}{\partial x} J_n(x, y, z; \tau, \delta)$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_{n-1}(x, y, z; \tau, \delta) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_{n+1}(x, y, z; \tau, \delta)\right]$$

Comparando se obtiene la relación de recurrencia (11).

De manera similar se deriva w dada en (17) con respecto de las variables y y z y se obtienen, respectivamente, las relaciones (12) y (13).

Demostración de (14)

Derivando parcialmente$w$ con respecto de τ,

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = exp\left[\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right) + \frac{y}{2}\left(t^2\tau - \frac{1}{t^2\tau}\right) + \frac{z}{2}\left(t^3\delta - \frac{1}{t^3\delta}\right)\right]\frac{y}{2}\left(t^2 + \frac{1}{t^2\tau^2}\right)$$

$$= w\left[\frac{y}{2}\left(t^2 + \frac{1}{t^2\tau^2}\right)\right] = \frac{wyt^2}{2} + \frac{wy}{2t^2\tau^2}$$

usando el desarrollo en serie de w dado en (17)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x,y,z;\tau,\delta) = \frac{y}{2}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^{n+2} J_n(x,y,z;\tau,\delta) + \frac{1}{\tau^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^{n-2} J_n(x,y,z;\tau,\delta)\right]$$

realizando la derivada de lado izquierdo y efectuando cambio de índices

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n \frac{\partial}{\partial\tau} J_n(x,y,z;\tau,\delta) = \frac{y}{2}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_{n-2}(x,y,z;\tau,\delta) + \frac{1}{\tau^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_{n+2}(x,y,z;\tau,\delta)\right]$$

se llega a demostrar la relación (14). Análogamente, de (17) derivando a w con respecto de δ, se obtiene (15).

Demostración de (16)

Derivando a w con respecto a t, se tiene

$$\frac{\partial w}{\partial t} = exp\left[\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)+\frac{y}{2}\left(t^2\tau-\frac{1}{t^2\tau}\right)+\frac{z}{2}\left(t^3\delta-\frac{1}{t^3\delta}\right)\right].$$

$$\left[\frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)+y\left(t\tau+\frac{1}{t^3\tau}\right)+\frac{3z}{2}\left(t^2\delta+\frac{1}{t^4\delta}\right)\right]$$

$$= w\left[\frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)+y\left(t\tau+\frac{1}{t^3\tau}\right)+\frac{3z}{2}\left(t^2\delta+\frac{1}{t^4\delta}\right)\right]$$

sustituyendo w por su desarrollo en serie dado en (17),

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x,y,z;\tau,\delta) = \frac{x}{2}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x,y,z;\tau,\delta) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^{n-2} J_n(x,y,z;\tau,\delta)\right]$$

$$+ y\left[\tau\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^{n+1} J_n(x,y,z;\tau,\delta) + \frac{1}{\tau}\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^{n-3} J_n(x,y,z;\tau,\delta)\right]$$

$$+ \frac{3z}{2}\left[\delta\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^{n+2} J_n(x,y,z;\tau,\delta) + \frac{1}{\delta}\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^{n-4} J_n(x,y,z;\tau,\delta)\right].$$

Efectuando la derivada del lado izquierdo de la ecuación, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t}\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x,y,z;\tau,\delta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} n t^{n-1} J_n(x,y,z;\tau,\delta)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n(n+1)J_{n+1}(x,y,z;\tau,\delta)=A$$

donde hemos aplicado un cambio de índice.

Entonces,

$$A=\frac{x}{2}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(x,y,z;\tau,\delta)+\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_{n+2}(x,y,z;\tau,\delta)\right]$$

$$+y\left[\tau\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_{n-1}(x,y,z;\tau,\delta)+\frac{1}{\tau}\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_{n+3}(x,y,z;\tau,\delta)\right]$$

$$+\frac{3z}{2}\left[\delta\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_{n-2}(x,y,z;\tau,\delta)+\frac{1}{\delta}\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_{n+4}(x,y,z;\tau,\delta)\right] \tag{18}$$

Comparando, y luego haciendo el cambio $n=n-1$,se llega a la relación (16).

Otras relaciones de recurrencia

$$\frac{\partial}{\partial x}[x^n J_n(x,y,z;\tau,\delta)]=x^{n-1}\Big[nJ_n(x,y,z;\tau,\delta)+$$

$$\frac{x}{2}[J_{n-1}(x,y,z;\tau,\delta)-J_{n+1}(x,y,z;\tau,\delta)]\Big] \tag{19}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[y^n J_n(x,y,z;\tau,\delta)]=y^{n-1}\Big[nJ_n(x,y,z;\tau,\delta)+$$

$$\frac{y}{2}\left[\tau J_{n-2}(x,y,z;\tau,\delta)-\frac{1}{\tau}J_{n+2}(x,y,z;\tau,\delta)\right]\Big] \tag{20}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[z^n J_n(x,y,z;\tau,\delta)\right] = z^{n-1}\Big[nJ_n(x,y,z;\tau,\delta) + \frac{z}{2}\left[\delta J_{n-3}(x,y,z;\tau,\delta) - \frac{1}{\delta}J_{n+3}(x,y,z;\tau,\delta)\right]\Big] \tag{21}$$

Demostración de (19)

Aplicando la derivada del producto en (19), se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[x^n J_n(x,y,z;\tau,\delta)\right] = nx^{n-1}J_n(x,y,z;\tau,\delta) + x^n\frac{\partial}{\partial x}J_n(x,y,z;\tau,\delta) \tag{22}$$

usando (11) se obtiene (19).

Similarmente, para demostrar (20) y (21) se aplica la derivada del producto y se usan, respectivamente, (12) y (13).

Ecuación Diferencial

A continuación se presentan una ecuación diferencial que satisface las funciones de Bessel de tres variables, dos parámetros y un índice,

La función de Bessel $J_n(x,y,z;\tau,\delta)$ satisface la ecuación diferencial

$$\Big[x^2\frac{\partial}{\partial x^2} - x\frac{\partial}{\partial x} + x^2 - n^2 + 2\tau\left[(1-2n) + 2\tau\frac{\partial}{\partial\tau}\right]\frac{\partial}{\partial\tau} + 3\delta\left[(1-2n) + 3\delta\frac{\partial}{\partial\delta}\right] + 12\tau\,\delta\frac{\partial^2}{\partial\tau}\partial\delta\Big]J_n = 0 \tag{23}$$

Demostración de (23)

Para mostrar el resultado (23) de (16) y las relaciones de recurrencia (14) y (15), se tiene

$$nJ_n(x,y,z;\tau,\delta) = \frac{x}{2}\left[J_{n-1}(x,y,z;\tau,\delta) + J_{n+1}(x,y,z;\tau,\delta)\right] + 2\tau\frac{\partial}{\partial\tau}J_n(x,y,z;\tau,\delta) + 3\delta\frac{\partial}{\partial\delta}J_n(x,y,z;\tau,\delta) \tag{24}$$

Despejando $\frac{1}{2}J_{n-1}(x,y,z;\tau,\delta)$ con $x \neq 0$

$$\frac{n}{x} J_n(x, y, z; \tau, \delta) - \frac{1}{2} J_{n+1}(x, y, z; \tau, \delta)$$

$$- \frac{2\tau}{x}\frac{\partial}{\partial \tau} J_n(x, y, z; \tau, \delta) - \frac{3\delta}{x}\frac{\partial}{\partial \delta} J_n(x, y, z; \tau, \delta) = \frac{1}{2} J_{n-1}(x, y, z; \tau, \delta) \tag{25}$$

De la relación de recurrencia (11), (25) puede escribirse como

$$J_{n-1}(x, y, z; \tau, \delta) = \left[\frac{n}{x} + \frac{\partial}{\partial x} - 2\frac{\tau}{x}\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{3\delta}{x}\frac{\partial}{\partial \delta}\right] J_n(x, y, z; \tau, \delta)$$

Definiendo el operador $S_- = \left[\frac{n}{x} + \frac{\partial}{\partial x} - 2\frac{\tau}{x}\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{3\delta}{x}\frac{\partial}{\partial \delta}\right]$ (26)

Despejando J_{n+1} de (25)

$$\frac{n}{x} J_n(x, y, z; \tau, \delta) - \frac{2\tau}{x}\frac{\partial}{\partial \tau} J_n(x, y, z; \tau, \delta) - 3\frac{\delta}{x}\frac{\partial}{\partial \delta} J_n(x, y, z; \tau, \delta)$$

$$- \frac{1}{2} J_{n-1}(x, y, z; \tau, \delta) = \frac{1}{2} J_{n+1}(x, y, z; \tau, \delta)$$

De la relación de recurrencia (11), se tiene

$$J_{n+1}(x, y, z; \tau, \delta) = \left[\frac{n}{x} - \frac{2\tau}{x}\frac{\partial}{\partial \tau} - 3\frac{\delta}{x}\frac{\partial}{\partial \delta} - \frac{\partial}{\partial x}\right] J_n(x, y, z; \tau, \delta) \tag{27}$$

Se define

$$S_+ = \left[\frac{n}{x} - \frac{\partial}{\partial x} - 2\frac{\tau}{x}\frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{3\delta}{x}\frac{\partial}{\partial \delta}\right].$$

Estos operadores verifican:

$$S_+(J_n) = J_{n+1}$$

$$S_-(J_n) = J_{n-1}$$

Esto nos permite demostrar que J_n satisface

$$\left[n - 1 + x\frac{\partial}{\partial x} - 2\tau\frac{\partial}{\partial \tau} - 3\delta\frac{\partial}{\partial \delta}\right]\left[n - x\frac{\partial}{\partial x} - 2\tau\frac{\partial}{\partial \tau} - 3\delta\frac{\partial}{\partial \delta}\right] J_n = 0$$

de la cual se obtiene (23).

Agradecimiento

Las autoras agradecen al Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico, de la Universidad del Zulia, el soporte financiero brindado.

Referencias bibliográficas

1. Lebedev, N.N., SpecialFunctions and theirApplications, Dover Publ. Co., New York (1972).
2. Dattoli, G., Chiccoli, C., Lorenzutta, S., Maino, G., Richetta, M. and Torre, A., AdvancesontheTheory of GeneralizedBesselFunctions and ApplicationstoMultiphotonProcesses, Journal of Scientific Computing, Vol. 8, No. 1, (1993), 69-109.
3. Dattoli G., Chiccoli, C., Lorenzutta, S., Maino, G. and Torre, A. GeneralizedBesselfunctions of theAngertype and applicationstophysicalproblems, Journal of MathematicalAnalysis and Applications, Vol. 184, No. 2, (1994), 201-221.
4. Chiccoli, C., Lorenzutta, S., Maino, G., Dattoli, G. and Torre, GeneralizedBesselfunctions a group-theoreticview, ReportsonMathematicalPhysics, Vol. 33, No. 1-2, (1993), 241-252.
5. Galué L., Kapteyn series forgeneralizedBesselfunctions, International Journal of AppliedMathematics, Vol. 7, No. 2, (2001), 159-167.
6. Dattoli, G., Magliorati, M. and Srivastava, H.M., Besselsummationformulae and operationalmethods, Journal of Computational and AppliedMathematics, Vol. 118, No. 1-2, (2000), 143-150.
7. Pathan, M.A., Goyal, A.N. and Shahwan, M.J.S., Lie-theoreticgeneratingfunctions of multivariable-generalizedBesselfunctions, ReportsonMathematicalPhysics, Vol. 39, No. 2, (1997), 249-254.