Revista Tecnocientífica URU
Universidad Rafael Urdaneta
Facultad de Ingeniería
Nº 10 Enero -Junio 2016
Depósito legal: ppi 201402ZU4464
ISSN: 2343 - 6360

Desarrollo de un algoritmo que implemente el método de diferencias finitas para resolver las ecuaciones de Einstein utilizando el formalismo 3+1 de la relatividad numérica

Favio Vásquez y Jubert Pérez
Escuela de Computación. Facultad de Ingeniería.
Universidad Rafael Urdaneta. Maracaibo, estado Zulia. Venezuela.
E-mail: favio.vazquezp@gmail.com

Recibido: 01-06-2014 Aceptado: 22-02-2016

Resumen

Se desarrolló un algoritmo que implementa el método de diferencias finitas aplicado al caso estudio de datos iniciales para agujeros negros trompeta de Bowen-York impulsados, y se hizo una descripción de los agujeros negros trompeta de Bowen-York rotantes y de los agujeros negros trompeta de Bowen-York binarios. Específicamente se usó un enfoque conforme transverso – sin traza, aplicado las ecuaciones de Einstein utilizando el formalismo 3+1 de la relatividad numérica. Se formulan las ecuaciones fundamentales en la relatividad numérica mediante la descomposición 3+1, aplicadas a agujeros negros para datos iniciales de Bowen-York y luego se presenta una metodología de desarrollo de un algoritmo numérico para resolver las mismas. El algoritmo se presenta en pseudocódigo y su implementación en el lenguaje de programación R. El código final se desplegó utilizando la filosofía de la licencia GNU General Public License v2.0 en un repositorio público (https://github.com/FavioVazquez/Liberum-Relativity-Project), siendo este libre, gratis y modificable por los usuarios, manteniendo la misma licencia. Se muestran los resultados de pruebas de unidad, integración y carga para el código final, las cuales dieron resultados muy positivos. Por último se muestran unas representaciones ilustrativas de los datos iniciales para agujeros de gusano, su transformación en agujeros negros de trompeta, así como una simulación para agujeros negros trompeta binarios, las cuales también están bajo la licencia GNU General Public License v2.0 en el mismo repositorio.

Palabras clave: Agujeros negros trompeta de Bowen York, método de diferencias finitas, relatividad numérica, formalismo 3+1, Liberum-Relativity Project, GNU General Public License v2.0.

Development of an algorithm that implements the finite difference method to solve Einstein's equations via the 3+1 formalism of numerical relativity.

Abstract

We developed an algorithm that implemented the finite difference method applied to the case study, boosted Bowen-York trumpet black hole initial data, with a description of rotating Bowen-York trumpet black holes and Bowen-York binary trumpets. Specifically we used a conformal transverse-traceless approach to

Einstein's equations in the 3+1 formalism of numerical relativity.

We formulated the fundamental equations in numerical relativity via the 3+1 decomposition, applied to boosted Bowen-York trumpet black hole initial data, and then we present a methodology to develop an algorithm in order to solve them. The algorithm is presented in pseudo-code, and its implementation in the R programming language. The final code was deployed using the GNU General Public License v2.0 philosophy in a public repository (https://github.com/FavioVazquez/Liberum- Relativity-Project), being free and modifiable by the users, under the same license. We showed the results of unity, integration and load tests, which gave very positive results. Lastly, some illustrative representations for wormholes initial data, their transformation to single trumpet black holes, and a simulation for binary trumpets are shown, which are also under the same GNU General Public License v2.0 in the same repository.

Keywords: Bowen-York trumpet black holes, finite difference method, numerical relativity, 3+1 formalism, Liberum-Relativity Project, GNU General Public License v2.0.

Introducción

La Teoría General de la Relatividad de Einstein fue uno de los logros teóricos más importantes del siglo XX, y del pensamiento humano. Esta nueva teoría describía de forma elegante y precisa la estructura, formación, dinámica y evolución del Universo, y aunque de muy alto nivel y complicada de entender, fue estudiada y detallada por muchos físicos e investigadores a lo largo de la primera mitad del siglo XX. Se dieron a conocer las primeras soluciones exactas tan solo unos pocos años después de las publicaciones de Einstein, por matemáticos y físicos que pudieron comprender la estructura de la teoría y las ecuaciones que la gobernaban, dando una nueva imagen al pensamiento cosmológico de la época. El desarrollo de esta teoría estuvo de la mano con avances fundamentales en la astronomía, los cuales permitieron probarla y corroborar su exactitud en predecir el comportamiento del Universo. En un lapso de 50 años, luego de las publicaciones de Einstein (Einstein 1915a,

1915b) descubrimos que vivíamos en una galaxia entre miles de millones de otras galaxias, que el Universo se expandía, que probablemente había comenzado con una explosión maravillosa que se llamó "Big Bang", y pudimos registrar eventos astronómicos nunca antes vistos por la humanidad gracias a los avances tecnológicos en astronomía y astrofísica.

Lamentablemente, las ecuaciones de Einstein son a veces muy difíciles de solucionar analíticamente, y para algunos sistemas que se pensaban existían en el Universo, éstas eran imposibles de resolver con técnicas analíticas convencionales.

Se pudieron encontrar soluciones a muchos sistemas, pero los más complejos, y muchos de ellos interesantes e importantes para el entendimiento completo de la dinámica de sistemas en el Universo, se mantenían solo como planteamientos debido a las imposibilidades mencionadas anteriormente. Por suerte, un área de la matemática comenzó a resurgir; los métodos numéricos para soluciones de ecuaciones diferenciales, y el análisis numérico de sistemas de ecuaciones diferenciales y algebraicas que se habían planteado entre en siglo XVIII y XIX comenzaron a tomar parte de la revolución tecnológica computacional, y a refinarse cada vez más para dar soluciones más precisas a problemas muy difíciles, o hasta imposibles, de resolver analíticamente.

En la segunda mitad del siglo XX, mientras se hacían avances tecnológicos y computacionales importantes, una nueva camada de físicos e ingenieros computacionales, comenzaron a pensar en la posibilidad de realizar algoritmos y programas para resolver las ecuaciones de Einstein en la computadora. En ese momento se encontraron con otro problema; las ecuaciones de Einstein para el campo gravitacional como estaban planteadas originalmente serían muy difícil e imprácticas de resolver por computadora, debido a que en ellas el tiempo y el espacio están unidos, en un tejido espacio-temporal el cual es deformable y es el que da la estructura al Universo, pero las computadoras no serían capaces de solucionar sistemas de ese estilo. Afortunadamente, la Teoría General de la Relatividad se había reformulado de diversas maneras, y se encontró que el formalismo 3+1 originado por los estudios podía ser el indicado para formular las ecuaciones de Einstein de una manera de que se pudieran crear algoritmos numéricos para resolverla.

Básicamente el formalismo 3+1 es un enfoque de la relatividad general que se basa en rebanar el espacio-tiempo cuatro-dimensional, en hipersuperficies 3-dimensionales y una temporal, de manera que se manipulan solo tensores variantes en el tiempo en un espacio tridimensional, lo cual permite reformular el problema de resolver las ecuaciones de Einstein, en un problema de Cauchy con ligaduras. Aunque existen, y se formularon en paralelo otras descomposiciones de las ecuaciones de Einstein, sin lugar duda la formulación 3+1 ha sido y es la más utilizada para la relatividad numérica.

Actualmente el área de la relatividad numérica está en un desarrollo y avance vertiginoso, y con el avance en la capacidad de cómputo y mejora del hardware de los sistemas digitales, se han dado respuestas a muchos problemas planteados desde hace casi un siglo por Einstein y muchos más. Pero existe un problema hoy en día. La mayoría de los códigos implementados y algoritmos formulados están hechos en software pago (de muy alto costo muchos de ellos) o para ser corrido en supercomputadoras, de los cuales una gran cantidad son privados para los investigadores que los realizaron, además que el código existente que está libre, aunque está bien documentado, es complejo de utilizar y entender para investigadores iniciantes en el área. No queremos ser mal entendidos, sí existen códigos y paquetes gratuitos que permiten encontrar soluciones para algunos sistemas físicos que implementen las ecuaciones de Einstein, solo que en muy poca medida, la mayoría no está lo mejor documentado posible y están hechos en lenguajes de programación que últimamente han perdido vigencia por los avances importantes de las nuevas metodologías y lenguajes de programación.

En este artículo se presenta, de forma resumida, una formulación teórica de los pasos necesarios para crear un algoritmo que implemente el método de diferencias finitas para resolver las ecuaciones de Einstein utilizando la formulación 3+1 de la relatividad numéricamente, específicamente se plantea del desarrollo de un algoritmo para resolver el problema de datos iniciales para agujeros negros de trompeta de Bowen-York impulsados, y una descripción del problema de datos iniciales para agujeros negros de trompeta de Bowen-York rotantes y agujeros negros de trompeta de Bowen-York binarios. Se presenta el desarrollo completo para agujeros negros de trompeta impulsados, el cual es implementado en el lenguaje de programación R, y también se hace un estudio detallado de los datos iniciales para agujeros negros trompeta de Bowen-York rotantes y binarios, planteando recomendaciones para la solución de estos sistemas en trabajos posteriores.

Este trabajo aunque en últimas está enfocado en el desarrollo de algoritmos computacionales, brinda información completa, precisa, detallada y de fuentes relevantes, que permitirían a investigadores en trabajos posteriores aplicar las técnicas, recomendaciones y teoría para la formulación de algoritmos numéricos para la solución de otros sistemas importantes para la relatividad numérica.

Metodología

Según Hurtado (2010, p. 694) un diseño virtual estudia los eventos a partir de datos generados por el investigador a través de ciertas técnicas, además dice para utilizar este diseño debe existir una teoría previa para probar los datos. Consideramos que este diseño se acoplaba al trabajo especial de grado debido a que los datos que se utilizarán para probar el algoritmo desarrollado, así como las condiciones establecidas para el mismo serán establecidos desde la teoría formulada más no desde la existencia "real" de un fenómeno particular; es decir, que esta información se obtendrá luego de que se establezcan y obtengan ecuaciones teóricas a partir de aproximaciones en diferencias finitas para las ecuaciones de campo de Einstein.

Luego Hurtado (2010, p. 721) establece que los diseños evolutivos están dirigidos a conocer las transformaciones que ocurren en uno o en varios eventos de estudio a lo largo del tiempo. Además establece que este diseño puede estar dirigido al pasado o al presente, como primera aproximación se estableció que este trabajo estaba dirigido al presente debido a que como indica la autora: “el diseño evolutivo centrado en el presente acompaña al evento y lo observa en su evolución, desde el presente hacia el futuro, a fin de estudiar sus cambios en el tiempo” (Hurtado, 2010 p. 721).

Profundizando más en la teoría de la autora se estableció que el trabajo especial de grado sería acompañado, además de por un diseño virtual, por un diseño evolutivo longitudinal, esto debido a que este tipo de diseño se caracteriza porque las mediciones o recolecciones de datos se hacen en varios momentos y de manera consecutiva, en la medida que el evento va cambiando, además que “el investigador sigue el evento como testigo de sus transformaciones” (Hurtado, 2010, p. 722).

Por lo tanto debido a que en este trabajo está destinado a desarrollar un algoritmo que implemente el método de diferencias finitas para resolver las ecuaciones de Einstein, necesariamente debe realizarse un estudio evolutivo de los resultados del algoritmo, tanto para comprobar su funcionamiento, como para su eficiencia; además, se podrá presenciar los cambios en el tiempo de las variables lo cual permite establecer de manera directa la aplicabilidad de este diseño.

Por otra parte Hurtado (2010, p. 735) establece que “los diseño multivariables son los que se ocupan del estudio de múltiples eventos de manera simultánea en la misma investigación”. Luego establece que estos diseños pueden ser de rasgo o de caso. Se consideró que este trabajo se acoplaba, además de con el diseño virtual y evolutivo longitudinal, con un diseño multivariable de caso, esto debido a que estos diseños “son estudios profundos o exhaustivos de una o de muy pocas unidades de estudios, cuyo objetivo es obtener un conocimiento detallado de ellas” (Hurtado 2010, p. 737). Por lo tanto debido a que se desarrollará y probará el algoritmo para algunos casos de estudio, más no para el total de eventos posibles que existen en el Universo o estudiables a partir de la teoría general de la relatividad en su forma numérica (formalismo 3+1), este trabajo se ajusta a un diseño de este tipo.

Por último, se estableció que el trabajo también cae en la categoría de diseño cuasi- experimental, que según Hurtado (2010, p. 756) éstos “se aproximan a la investigación experimental, pero no cumplen con todas las condiciones de rigurosidad que tienen los diseños experimentales. En este tipo de diseño el investigador puede manipular la variable independiente, pero no hay selección al azar o rigurosa de la muestra”. Aunque se escogieron y precisaron con detalle los escenarios cosmológicos a analizar, su selección no fue al azar, sino que se determinaron por reglas establecidas previamente, y se obtuvieron sus parámetros a partir de ecuaciones y cálculos numéricos, por lo tanto la investigación no puede tener un diseño experimental, pero como sí se modificaron las variables (en el transcurso de los procedimientos en el programa) tampoco puede tener un diseño no experimental, derivando entonces en este diseño y completando la descripción del diseño global de la investigación.

Existen muchas técnicas de recolección de datos e información, y no en todos los autores se pueden detallar características equivalentes para las mismas, así como para su registro. Luego de una extensa revisión bibliográfica, se estableció que la técnica e instrumento de recolección de datos e información a utilizar en este trabajo especial de grado era la técnica de simulación y creación de modelos.

La investigación se dividió en tres fases, las cuales se detallan a continuación:

I. Análisis:

- Se plantearon las ecuaciones y fundamentos teóricos de la relatividad numérica, particularmente para obteniendo las condiciones iniciales y de frontera que permitan establecer un esquema de desarrollo para su solución utilizando un algoritmo que implemente el método de diferencias finitas.

- Se estudiaron y obtuvieron las ecuaciones para algunos casos de estudio, específicamente, para datos iniciales para agujeros negros trompeta de Bowen-York impulsados, con una descripción de los agujeros negros trompeta de Bowen-York rotantes y de los agujeros negros trompeta de Bowen-York binarios para el diseño e implementación del algoritmo.

II. Diseño

- Luego se diseñaron y estructuraron los componentes de software para la implementación del algoritmo.

III. Implementación

- Se procedió a desarrollar el algoritmo planteado utilizando los componentes de software estructurados.

- Se validó el algoritmo a través de pruebas de carga, unidad e integración el algoritmo.

- Por último se desarrollaron algunas visualizaciones demostrativas y esquemáticas sobre los casos de estudio analizados.

Resultados

Se decidió estudiar y desarrollar un algoritmo para resolver las ecuaciones de Einstein para el caso de datos iniciales para agujeros negros trompeta de Bowen-York impulsados, con una descripción de los agujeros negros trompeta de Bowen-York rotantes y de los agujeros negros trompeta de Bowen-York binarios, usando el método de Bowen-York, específicamente un enfoque conforme transverso – sin traza, de las ecuaciones, por ser un problema entendido y estudiado a lo largo de los años por importantes investigadores, y aunque según la bibliografía (Pfeiffer, 2004; Baumgarte y Shapiro, 2010; East, Ramazanoğlu y Pretorius 2012) estos no representan muy realísticamente agujeros binarios como se quisiera, son un muy buen comienzo para el estudio de soluciones de las ecuaciones de ligadura y evolución, y presentan algunas simplicidades para ser dispuestos en una forma adecuada para ser resueltos numéricamente. El trabajo final consistió en disponer las ecuaciones para estos agujeros negros de forma que puedan resolverse numéricamente, desarrollar y probar el algoritmo realizado para su solución y hacer algunas representaciones esquemáticas de las soluciones obtenidas.

Comenzamos por reescribir las ecuaciones de Einstein en el formalismo 3+1. Básicamente, necesitamos tomar las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci y eliminar el tensor de Riemann 4-dimension utilizando las ecuaciones de Einstein

$$G_{ab} \equiv {}^{(4)}R_{ab} - \frac{1}{2}\,{}^{(4)}Rg_{ab} = 8\pi T_{ab} \tag{1}$$

En esta última sección trabajaremos sólo con objetos geométricos; recurrimos ahora a las ecuaciones de Einstein para enlazar estos objetos geométricos con las propiedades físicas del espacio-tiempo. Las ecuaciones de restricción se obtienen desde las ecuaciones de Gauss y Codazzi, y las ecuaciones de evolución se obtienen con la ecuación para la curvatura extrínseca y la ecuación de Ricci.

Contrayendo la ecuación de Gauss, trabajándola utilizando algunos objetos geométricos y usando las ecuaciones de Einstein, llegamos a

$$R + K^2 - K_{ab}K^{ab} = 16\pi\rho \tag{2}$$

Esta ecuación es llamada la restricción1 hamiltoniana (Baumgarte y Shapiro, 2010). Donde hemos definido la densidad de energía como la densidad de energía total medida por un observador normal $\ddot{u}_a$,

$$\rho \equiv n_a n_b T^{ab} \tag{3}$$

Luego contrayendo la ecuación de Codazzi y trabajándola de la misma manera que la ecuación anterior obtenemos

$$D_b K_a^b - D_a K = -Y_a^q n^s G_{qs} \tag{4}$$

La cual es conocida como la restricción de momentum, y donde hemos definido a como la densidad de momentum medida por un observador normal, n_a

$$S_a = -\gamma_a^b n^c T_{bc} \tag{5}$$

La restricción hamiltoniana (2) y la restricción de momentum (4) solo involucran la métrica espacial, la curvatura extrínseca y sus derivadas espaciales. Son las condiciones que permiten que una rebanada Σ 3-dimensional con datos (Yab, Kab), sea embebida en una variedad M 4-dimnesional con datos (Gab). Los datos de campo (Yab, Kab) que son impuestos en una rebanada temporal Σ, deben satisfacer ambas restricciones.

La existencia de las constricciones implica que en la relatividad general no es posible especificar de manera arbitraria las 12 cantidades dinámicas (Yab, Kab) como condiciones iniciales. Las constricciones deben satisfacerse ya desde el inicio, o no estaremos resolviendo las ecuaciones de Einstein.

Las últimas 6 ecuaciones se obtienen de la proyección a la hipersuperficie y contienen la verdadera dinámica del sistema. Estas ecuaciones son:

$$\mathcal{L}_t K_{ab} = -D_a D_b \alpha + \alpha\left(R_{ab} - 2K_{ac}K_b^c + KK_{ab}\right) - 8\pi\alpha\left[S_{ab} - \frac{1}{2}(S-\rho)\right] + \mathcal{L}_\beta K_{ab} \qquad (6)$$

Donde hemos definido el estrés espacial y su traza como

$$S_{ab} \equiv \gamma_a^c \gamma_b^d T_{cd} \qquad S \equiv S_a^a \qquad (7)$$

Y la evolución para la métrica espacial Yab, la última pieza perdida, puede escribirse como

$$\mathcal{L}_t \gamma_{ab} = -2\alpha K_{ab} + L_\beta \gamma_{ab} \qquad (8)$$

Las ecuaciones (6) y (8) forman un sistema cerrado de ecuaciones de evolución. A estas ecuaciones se les conoce como las ecuaciones de Arnowitt-Deser-Misner, o simplemente las ecuaciones ADM (Alcubierre, 2005). Estas ecuaciones finalmente nos permiten escribir las ecuaciones de campo de la relatividad general como un problema de Cauchy.

Seguimos los pasos para solucionar las ecuaciones de ligadura como son especificados por Shapiro y Baumgarte, (2010, p. 55)2: Típicamente,…, la solución de las ecuaciones de Einstein de valores iniciales procede según las siguientes líneas. Primero decidimos cuáles variables de campo queremos determinar mediante la resolución de las ecuaciones de ligadura. Esto conlleva a escoger una descomposición particular de las ecuaciones de ligadura. Luego debemos tomar decisiones para las variables libremente especificables que queden. Estas decisiones deben reflejar la solución física o astrofísica, pero también pueden ser guiadas por alguna simplificación resultante que indujeron en las ecuaciones de ligadura. Por último, debemos resolver estas ecuaciones para las variables de ligadura.

Comenzamos por escribir la métrica espacial Yij como el producto de alguna potencia de un factor escalar positivo Ψ y una métrica de fondo Ȳij. Luego para la curvatura extrínseca es conveniente separar Kij en su traza K y una parte sin-traza Aij de acuerdo a

$$K_{ij} = A_{iu} + \tfrac{1}{3}\gamma_{ij}K \qquad (9)$$

y hacer una transformación conforme de y por separado. No está claro a priori cómo transformar K y Aij, y nuestra única guía es que la transformación debe llevar a las ecuaciones de ligadura a una forma simple y resoluble (Baumgarte y Shapiro, 2010). Podemos considerar las transformaciones

$$A^{ij} = \psi^{\alpha}\overline{A}^{ij} \qquad (10)$$

$$K = \psi^{\beta}\overline{K} \qquad (11)$$

Donde α y β son dos exponentes hasta ahora indeterminados. Aunque existen algunos valores para estos exponentes detallados en la bibliografía, nos apegamos a la descripción de Gourgoulhon (2012), en la cual mediante una inspección de la ecuación para la ligadura de momentum, se sugiere la selección de α = -10, y con esto

$$A^{ij} = \psi^{-10}\bar{A}^{ij} \tag{12}$$

Lo cual implica que Aij = Ψ-2Āij. Con esta selección un tensor simétrico sin-traza tiene divergencia cero sí y solo sí Āij también la tiene. Insertando la expresión (11) en la ligadura de momentum produce

$$\psi^{-10}\bar{D}_j\bar{A}^{ij} - \tfrac{2}{3}\psi^{\beta-4}\bar{\gamma}^{ij} - \tfrac{2}{3}\beta\psi^{\beta-5}\bar{K}\bar{\gamma}^{ij}\bar{D}_j\psi = 8\pi S^i \tag{13}$$

Y con nuestro deseo de simplificar las ecuaciones, motivan a escoger de manera que tratamos K como una invariante conforme, K = K Con esta selección, la ligadura hamiltoniana se convierte en

$$8\bar{D}^2\psi - \psi\bar{R} - \tfrac{2}{3}\psi^5 K^2 + \psi^{-7}\bar{A}_{ij}\bar{A}^{ij} = 16\pi\psi^5\rho \tag{14}$$

y la ligadura de momentum es

$$\bar{D}_j\bar{A}^{ij} - \tfrac{2}{3}\psi^6\bar{\gamma}^{ij}\bar{D}_j K = 8\pi\psi^{10}S^i \tag{15}$$

La mayoría de las descomposiciones usan el re-escalado conforme de la métrica y la curvatura extrínseca como fue introducido arriba. Diferentes descomposiciones proceden mediante la descomposición de Āij de diferentes manera. Para el caso de estudio de este trabajo se utilizó la descomposición conforme transversa – sin traza.

Y luego de un largo proceso algebraico muy detallado en el trabajo especial de grado, se pudieron conseguir las ecuaciones necesarias para ser solucionadas utilizando el método de diferencias finitas, estas ecuaciones representan los valores iniciales para agujeros negros de trompeta de Bowen-York. Para obtener esta ecuación diferencial parcial elíptica lineal, se utilizó el método de punción movediza y una serie de conjeturas y suposiciones que no pueden ser detalladas por la brevedad del artículo, se remite al lector al trabajo de tesis para una demostración de la siguiente ecuación, que fue para la cual se realizó el algoritmo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = & -\frac{\left(\frac{3m}{2}\right)^{\frac{7}{2}}}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{5}{4}}}\frac{81}{64}M^4 \\
& + \frac{\sqrt{\frac{3M}{2\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}}\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\left[99\left(x^2+y^2\right)^4 - 26\left(x^2+y^2\right)^2 + 3\right]}{4\left[\left(x^2+y^2\right)^{\frac{5}{2}} + 3\right]^3} \\
& - \frac{4\left(x^2+y^2\right)\left(3-5\left(x^2+y^2\right)^2\right)}{\left[\left(x^2+y^2\right)^2+1\right]^3}
\end{aligned} \tag{16}$$

Donde las condiciones de frontera que utilizamos fueron

$$0 \leq x \leq 1 \tag{17}$$

$$0 \leq y \leq 1 \tag{18}$$

Donde hemos utilizado el compactado el infinito haciendo la que x,y -> sea igual a x,y =1, y

$$u(0,\ y) = \sqrt{\frac{3M}{2y}}, \qquad u(1,\ y) = \sqrt{\frac{3M}{2\left(1+y^2\right)^{\frac{1}{2}}}} \tag{19}$$

$$u(x,\ 0) = \sqrt{\frac{3M}{2x}}, \qquad u(x,\ 1) = \sqrt{\frac{3M}{2\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}} \tag{20}$$

En este trabajo se utilizó una aproximación en diferencias finitas3 con diferencias centradas, y el método iterativo de Gauss-Seidel para la resolución de las ecuaciones algebraicas resultantes, el cual resulta muy útil para estos casos, converge muy rápido.

El método iterativo de Gauss-Seidel que se utilizó surge como una mejora del método de Jacobi. Una inspección de la ecuación para el método de Jacobi nos deja ver que las componentes de X (k-1) son utilizadas para calcular las componentes Xi(k) de X(k) , pero para, i >1 las componentes x1(k) ,…, xi-1(k) de X(k) ya han sido computadas y se espera que sean aproximaciones mejorar a las soluciones actuales x1,…,xi-1 que X1(k-1). Parece razonable entonces, computar X1(k) usando los valores calculados más recientes. Esto es, usar

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[\sum_{j=1}^{i-1}\left(-a_{ij}x_j^{(k)}\right) - \sum_{j=i+1}^{n}\left(-a_{ij}x_j^{(k-1)}\right) + b_i\right], \qquad \text{para } i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n. \tag{21}$$

Esta mejora es la que define el método iterativo de Gauss-Seidel.

En el trabajo especial de grado, el algoritmo realizado para la solución de las ecuaciones planteadas se muestra primero en pseudocódigo, esto para que pueda ser implementado en cualquier lenguaje de programación moderno que el usuario desee. La implementación del algoritmo se realizó en el lenguaje de programación R, lo cual puede ser sorpresivo para las personas involucradas en la resolución de problemas numéricos, debido a que históricamente los métodos numéricos para la solución a las ecuaciones diferenciales han sido programados típicamente en Fortran, C y Java. Aunque ya existen métodos de solución gratuitos para estas ecuaciones, comúnmente se necesita un grado de experticia de programación bastante alto para su uso y modificación; en el caso de los métodos más sofisticados más aún. Por otra parte, el software "fácil de usar" para resolver estos problemas, como MATLAB, Maple o Mathematica son muy costosos, e inaccesibles para la mayoría de los estudiantes a nivel mundial. En cambio R es totalmente gratuito y corre de en todos los sistemas operativos comunes: Mac OS, Windows y Linux.

Las entradas y salidas del algoritmo son (el código completo puede encontrarse en el trabajo especial de grado, y el código en R en el repositorio público de Liberum-Relativity Project4:

Entrada:

- Tipo (Real). Valores de frontera de las variables: a, b, c, d;
- Tipo (Entero): Tamaño máximo de la red en "x" y "y": m >= 3, n>=3.
- Tipo (Real): Tolerancia: TOL.
- Tipo (Entero): Número máximo de iteraciones: N.
- Tipo (Real): Parámetro másico estimado del agujero negro de trompeta.

Figura 1. Liberum-Relativity Project Logo

Salida:

- Matriz w[i, f] que contiene las aproximaciones para u(xi, yi) para cada

i = 1,…, n y para cada j = 1,…, n-1.

Se hicieron revisiones formales a detalle mediante la codificación del algoritmo para señalar si existían desviaciones sobre los fundamentos planteados inicialmente, recopilando datos sobre las mismas las cuales servirían como guía para las pruebas finales. Las pruebas que se hicieron fueron de comprobación dinámica las cuales implican que se hicieron en ejecución del programa y fueron pruebas de unidad, integración y carga, las cuales dieron resultados muy positivos para el código, de nuevo se remite al lector interesado al trabajo especial de grado para una explicación detallada de las pruebas.

Por último se muestran algunas simulaciones ilustrativas que representan algunos puntos fundamentales de la teoría de fondo del trabajo especial de grado, y una esquematización de lo que se debería ver utilizando los datos obtenidos por el algoritmo planteado, más las soluciones para agujeros negros rotantes y binarios. Recordamos que estas simulaciones son videos que se encuentran de forma gratuita en el repositorio público bajo la licencia GNU General Public License v2.0. La primera ilustración muestra cómo luciría el paso de los datos iniciales para agujeros de gusano a agujeros negros de trompeta, con el enfoque de Bowen-York, y la segunda simula la unión de dos agujeros negros de Bowen-York impulsados y rotantes.

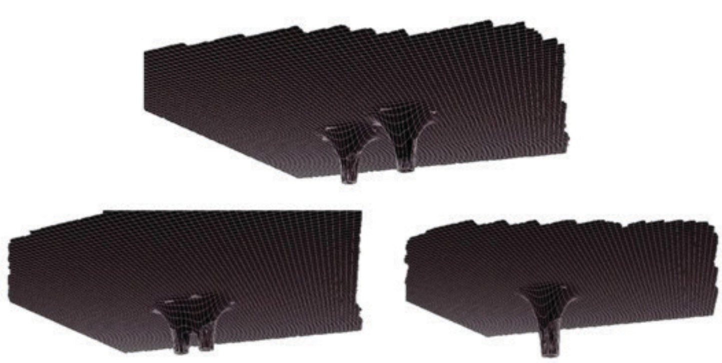

Figura 2. Simulaciones para agujeros negros de trompeta binarios de Bowen-York impulsados y rotantes.

Conclusiones

Para concluir, se debe comenzar por dar respuesta a la formulación inicial del problema, la cual guió el desarrollo y resultado de la investigación. La formulación que se planteó establecía la pregunta de cómo desarrollar un algoritmo que implemente el método de diferencias finitas para resolver las ecuaciones de Einstein utilizando el formalismo 3+1 de la relatividad numérica, aplicado al caso de estudio de datos iniciales para agujeros negros trompeta de Bowen-York impulsados, y dar una descripción de los agujeros negros trompeta de Bowen-York rotantes y de los agujeros negros trompeta de Bowen-York binarios; y para dar respuesta a la misma se comienza repitiendo los resultados obtenidos de cómo debería hacerse la formulación teórico-práctica de un algoritmo de este estilo, para un caso generalizado:

1. Encontrar un sistema físico relativista que se desee modelar, estudiar sus características y plantear las ecuaciones de Einstein que lo describan.

2. Hacer una descomposición de las ecuaciones, i.e. 3+1 ADM, de modo que estas se dividan en ecuaciones de ligadura y ecuaciones de evolución.

3. Encontrar datos iniciales para el modelo que se planteó, los cuales deben cumplir con las ligaduras hamiltoniana y de momentum en una hipersuperficie , estudiar el comportamiento de estos datos si se puede analíticamente. Comúnmente en este paso se aplican transformaciones conformes de las ecuaciones porque estas permiten una separación conveniente de las variables de ligadura de las variables libremente especificables.

4. Del paso anterior resultarán usualmente ecuaciones diferenciales parciales elípticas no lineales, a las cuales se les deben aplicar algún método para verificar su existencia y unicidad, así como su comportamiento para tener una idea de cómo deben ser sus soluciones.

5. Si no se desea trabajar con EDPs no lineales, debe encontrarse un mecanismo para convertir estas ecuaciones en lineales, i.e. con métodos con parámetros de corrección, perturbaciones, etc.

6. Para resolver las ecuaciones que surgen del paso anterior mediante el método de diferencias finitas, se discretizan las derivadas y las funciones.

7. Se utiliza algún método iterativo, multiplicación de matrices o el más adecuado para resolver el sistema algebraico resultante. Validar los resultados numéricos mediante pruebas de convergencia, unidad, integración y carga.

8. Luego con las soluciones obtenidas para las ecuaciones de ligadura se pasa a resolver las ecuaciones de evolución, es decir, se evolucionan los datos obtenidos. Generalmente esto conlleva también a resolver ecuaciones diferenciales parciales que por lo general son elípticas o hiperbólicas y de nuevo se siguen los pasos 5-7, o en lo posible hallar algunas soluciones analíticas. Hay que señalar que existen métodos y técnicas distintitas para resolver las ecuaciones de ligadura y las de evolución, para las segundas la técnica más utilizada y precisa para hacerlo es la formulación BBSN, (Shibata y Nakamura 1995, Baumgarte y Shapiro 1999).

9. Por último estudiar las propiedades y características de las soluciones obtenidas, recogiendo de ellas la mayor información numérica y física posible para una descripción del modelo planteado de sistema astrofísico.

En este trabajo se aplicó esta metodología de forma exitosa, debido a que se pudo lograr el objetivo general el cual planteó el desarrollo un algoritmo que implemente el método de diferencias finitas para resolver las ecuaciones de Einstein utilizando el formalismo 3+1 de la relatividad numérica, para el caso de estudio de datos iniciales para agujeros negros trompeta de Bowen-York impulsados, y dar con una descripción de los agujeros negros trompeta de Bowen-York rotantes y de los agujeros negros trompeta de Bowen-York binarios.

Se destaca además que el código implementado en R, así como el algoritmo y las simulaciones ilustrativas que se realizaron, se encuentran bajo la licencia GNU General Public License v2.0 en un repositorio público5, lo cual los convierte en código libre, compartible y modificable bajo la misma licencia, el cual hemos denominado Liberum- Relativity Project. Lo cual también consideramos que es un logro importante del trabajo: comenzar una nueva tendencia que utilice las metodologías de programación, despliegue y

compartido de código actuales para resolver las ecuaciones de Einstein con los formalismos de la relatividad numérica, y sean dispuestos de forma gratuita y libre para la comunidad de investigadores; lo cual puede tener una influencia muy positiva en el área en los próximos años, facilitando el estudio y uso de la misma por investigadores iniciantes, y que los grupos más importantes que desarrollan estos códigos puedan ayudarse de forma libre y pública en la construcción de nuevos algoritmos y código numérico para dar respuestas a los problemas fundamentales de la cosmología moderna y muchas otras interrogantes que puedan surgir.

Referencias bibliográficas

1. Alcubierre, M, (2005). Introducción a la relatividad numérica. Revista Mexicana de Física, vol. 53 (2), 5 - 30.
2. Baumgarte, T. y Shapiro, S. (1999). Numerical Integration of Einstein's Field Equations. Physical Review D, vol. 59 (2).
3. Baumgarte, T. y Shapiro, S. (2010). Numerical Relativity: Solving Einstein's Equations on the Computer. Reino Unido: Cambridge University Press.
4. East, W., Ramazanoğlu, F, y Pretorius, F., (2012). Conformal thin-sandwich solver for generic initial data. Physical Review D, vol. 86, Issue 10, id. 104053.
5. Einstein, A. (1915 a). Die felfgleichungen der gravitation. Preuss. Akad. Wiss. pp. 844-847. Einstein, A. (1915 b). Zur algemeinen relativitätstheorie. Preuss. Akad. Wiss. pp. 778-786. Hurtado, J. (2010). Metodología dela investigación: Guía para una comprensión holística de la ciencia (4ta ed.). Caracas: Quirón Ediciones.
6. Gourgoulhon, E., (2012). 3+1 Formalism in General Relativity: Bases of Numerical Relativity. Alemania: Springer
7. Pfeiffer, H., (2004). The initial value problem in numerical relativity. Contribución a las actas de la "Miami Waves Conference 2004".
8. Shibata, M. y Nakamura, T., (1995). Evolution of three-dimensional gravitational waves: Harmonic slicing case. Physical Review D, vol. 52 (10), pp. 5428-5444.